Dr. Siska Desy Fatmaryanti, M.Si

BUKU AJAR

Matrik dan Ruang Vektor dalam Fisika dengan Aplikasi Program Matlab

UNIMMA PRESS
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH MAGELANG

UNIMMA PRESS
Universitas Muhammadiyah Magelang

Dr Siska Desy Fatmaryanti, M.Si

BUKU AJAR

Matrik dan Ruang Vektor dalam Fisika dengan Aplikasi Program Matlab

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram,atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahundan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Matrik dan Ruang Vektor dalam Fisika dengan Aplikasi Program Matlab

ISBN: 978-623-7261-61-2

Penulis:

Dr Siska Desy Fatmaryanti,M.Si

UNIMMA PRESS
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH MAGELANG

Penerbit:

UNIMMA PRESS

Gedung Rektorat Lt. 3 Kampus 2 Universitas Muhammadiyah Magelang
Jalan Mayjend Bambang Soegeng km.05, Mertoyudan, Magelang
56172 Telp. (0293) 326945

E-Mail: unimmapress@ummgl.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia yang telah diberikan. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita menuju zaman yang berilmu pengetahuan.

Akhirnya, penulis dapat menyelesaikan buku "Matriks dan Ruang Vektor dalam Fisika dengan Aplikasi Program Matlab" dengan segenap kemampuan. Buku ini terdiri atas tujuh bab yang mengupas teori dasar matriks, Sistem Persamaan Linier, determinan, ruang vektor sampai pada transformasi linier dan perhitungan nilai eigen maupun vektor eigen. Buku ini sebagai pegangan dan membantu untuk memahami perkuliahan Matriks dan Ruang Vektor bagi mahasiswa khususnya, yang dilengkapi dengan pengerjaan menggunakan program MATLAB dan diperkaya dengan penerapan pada konsep fisika.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan dan penyusunan buku ini. Saran dan kritik dari pembaca sangat diperlukan untuk perbaikan di masa datang. Selamat membaca, semoga bermanfaat.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

MATRIKS

Deskripsi Singkat

Penggunaan matriks dalam fisika mencakup bidang yang sangat luas. Hampir semua bagian dari fisika menggunakan matriks. Sebagai contoh dalam mekanika, dalam membahas momen inersia benda. Untuk menganalisa getaran yang ditimbulkan oleh rangkaian listrik atau pegas juga digunakan matriks. Umtuk tingkat yang lebih tinggi seperti dalam mekanika kuantum banyak sekali digunakan matriks.

Capaian Pembelajaran

Mahasiswa mampu menjelaskan tentang aljabar matrik, menggunakan simulasi komputer dalam menyelesaikan persoalan matrik, serta dapat mengaplikasikannya untuk mempelajari pengetahuan fisika sesuai dengan perkembangan sains dan teknologi.

1.1. Definisi dan Notasi

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai penulisan data-data dalam suatu baris dan kolom. Misalnya data penjualan tiket kereta api Jakarta-Surabaya pada hari Rabu, 10 Mei 2020.

	Kereta A	Kereta B	Kereta C	Kereta D
Kelas Ekonomi	20	25	20	40
Kelas Bisnis	50	55	20	30
Kelas Eksekutif	20	20	50	30

Penyusunan angka-angka seperti di atas merupakan suatu matriks. Dari sini dapat didefinisikan pengertian suatu matriks.

Matriks merupakan suatu susunan bilangan (real maupun kompleks) yang disusun dalam suatu baris dan kolom. Larik-larik dari bilangan ini disusun dalam suatu kurung siku ([....]).

Sebagai contoh, untuk matriks penjualan tiket kereta api di atas dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} 20 & 25 & 20 & 40 \\ 50 & 55 & 20 & 30 \\ 20 & 20 & 50 & 30 \end{bmatrix}$$

untuk contoh lain adalah:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Anggota tunggal dari susunan matriks disebut dengan elemen matriks. Meskipun mendefinisikan elemen suatu matriks adalah bilangan, kita dapat memperluas elemennya untuk fungsi sebagai contoh matriks.

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_4(x) & f_5(x) & f_6(x) \end{bmatrix}$$

dimana $f_1(x)$ merupakan fungsi dari x. Jika kita tinjau matriks $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka (a, b, c) disebut dengan baris pertama dari matriks. Sedangkan $\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$ adalah kolom pertama dari matriks tersebut.

Dalam menyatakan banyaknya elemen suatu matriks, kita menggunakan indeks dalam penulisannya. Jika sutau matriks memiliki m baris dan n kolom, maka kita katakan matriks tersebut memiliki orde $m \times n$. Secara umum matriks dapat ditulis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan elemen a_{ij} dapat berupa bilangan real, kompleks maupun fungsi.

Untuk penyingkatan biasanya ditulis:

$$A = \left| a_{ij} \right|_{m \times n}$$

yang berarti matriks A berorde $m \times n$ dengan elemen ij ke ji adalah $a\ ij$. Jelas disini bahwa $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$. Jika orde matrik tidak kita tuliskan, seperti $(A)ij = a_{ij}$. Ini menyatakan elemen matriks A ke ij.

1.2. Aljabar Matriks

Sebelum kita masuk ke penjumlahan dan pengurangan matriks, kita lihat dulu kesamaan antara dua matriks. Dua buah matriks dikatakan sama jika dipenuhi kondisi berikut:

a. Orde kedua matriks harus sama

b. Semua elemen terkait harus sama

Jadi, jika $A = B$ maka, $A_{m\times n} = B_{m\times n}$ dan setiap elemen $a_{ij} = b_{ij}$.

Contoh: Jika matriks A = matriks B, tentukan X dan Y dimana

$$A = \begin{bmatrix} X+Y & 3 \\ 2 & X-Y \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dari syarat yang ada maka didapat $X + Y = 2$, $X - Y = 0$ sehingga nilai X dan Y didapatkan $X = Y = 1$

1.3. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jika kita ingin menjumlahkan dua matriks, maka kondisi yang haris dipenuhi adalah orde kedua matriks harus sama sedangkan matriks hasil penjumlahannya akan sama dengan orde matriks yang dijumlahkan. Misalkan A dan B matriks orde $m \times n$ dan C adalah hasil $A + B$ maka C juga memiliki orde $m \times n$. Cara menjumlahkan kedua matriks adalah dengan mnejumlahkan elemen-elemen yang berhubungan:

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \text{ atau } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

begitu juga untuk pengurangan antar dua matriks dapat ditulis dengan:

$$[A - B]_{ij} = c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

di dalam penjumlahan matriks ini berlaku hukum komutatif $A + B = B + A$.

Contoh:

Tentukan hasil penjumlahan matriks A dan B berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 & 5+1 \\ 1+0 & 3+1 & 2+3 \\ 0+1 & 1+4 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

1.4. Perkalian Matriks dengan Suatu Skalar

Suatu matriks dapat dikalikan dengan suatu skalar atau bilangan. Jika A suatu matriks $m \times n$ dengan elemen ke ij adalah a_{ij} dan s suatu skalar, maka perkalian s dengan A akan memiliki elemen sa_{ij}.

Contoh soal:

$$\text{jika } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka } 5A = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$

1.5. Perkalian Dua Matriks

Perkalian dua matriks tidaklah sesederhana mengalikan dua bilangan. Untuk dapat mengalikan dua matriks di perlukan syarat yaitu jumlah kolom matriks pertama harus sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A_{m \times n}$ dan $B_{k \times l}$ maka matriks A dapat dikalikan dengan B jika $n = k$. Sedangkan orde hasil perkalian matriks A dan B adalah $m \times 1$.

$$C_{m \times 1} = A_{m \times n} B_{k \times l}$$

Untuk menghasilkan elemen matriks C dilakukan dengan cara berikut:

Andaikan $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ dan $A = \left[b_{ij}\right]_{k \times l}$, maka elemen ke ij dari perkalian AB adalah jumlah perkalian elemen baris $ke - i$ dari A dengan elemen $ke - j$ dari B. dapat kita tuliskan sebagai berikut:

Andaikan elemen baris $ke - i$ dari $A = \left[a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3,}\ \dots, a_{in}\right]$ dan elemen kolom $ke - j$ dari

$B = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ maka elemen $ke - ij$ dari perkalian AB adalah jumlah perkalian elemen-elemen di atas.

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le 1$$

Contoh soal:

Carilah perkalian A dan B dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Kita lihat bahwa A memiliki orde 3×2 dan B berorde 2×2. Jadi syarat untuk mengalikan A dengan B terpenuhi, karena jumlah kolom A sama dengan jumlah baris B. Untuk mengecek jumlah orde matriks perkalian AB dapat ditulis $3 \times 2 \,.\, 2 \times 2$ didapat 3×2.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 23 & 24 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

adalah matriks dengan orde 3×2.

Dari contoh di atas bagaimana jika kita balik yaitu B dikalikan ke A. ternyata jumlah kolom B tidak sama dengan jumlah baris A, dengan demikian B tidak dapat dikalikan dengan A. jika A dan B suatu matriks bujursangkar dimana jumlah baris dan kolom sama, maka kita dapat mengalikan A dengan B dan B dengan A. Hal ini disebabkan jumlah baris dan kolom kedua matriks sama. Walaupun demikian kita harus hati-hati bahwa perkalian AB tidak sama dengan BA. Jadi dalam perkalian matriks tidak berlaku hukum komutatif.

Contoh soal:

Buktikan $AB \neq BA$ untuk matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian: dari perkalian AB didapat:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 18 & -37 \\ -22 & 12 & 8 \\ 78 & 39 & -57 \end{bmatrix}$$

sebaliknya:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & -37 \\ 31 & 12 & 8 \\ 12 & -58 & 33 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa $AB \neq BA$

1.6. Komutator

Jika A dan B matriks orde $n \times n$ maka selisih antara perkalian AB dengan BA disebut komutator, disimbolkan dengan $[A, B] = AB - BA$

Untuk kasus khusus didapatkan AB sama dengan BA. Jika hal ini terjadi dikatakan A dan B komut satu dengan yang lainnya. Untuk A dan B komut maka $[A, B]$ sama dengan nol.

Pada contoh di atas terlihat A dan B tidak komut, tetapi untuk

$$C = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -2 & 10 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$ komut dengan

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$, (buktikan).

Jika A komut dengan B dan B komut dengan C maka kita tidak boleh mengambil kesimpulan bahwa A juga komut dengan C. dalam perkalian matriks berlaku hukum asosiatif, yang berarti jika A, B dan C tiga buah matriks dimana perkalian AB dan BC dapat dilakukan atau didefinisikan, maka akan dipenuhi sifat:

$$(AB)C = A(BC)$$

Bukti jika:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times p}\ dan\ C = [c_{ij}]_{p\times q}$$

maka elemen:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{P} (AB)_{ik}(C)_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{P} \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}(B)_{lk}(C)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{P} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

sedangkan elemen $ke - ij$ untuk A(BC) adalah:

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{P} (A)_{il} (BC)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{P} (A)_{il} \sum_{k=1}^{n} (B)_{lk} (C)_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{P} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

dari sini didapat bahwa

$$[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$$

Selain sifat-sifat diatas pada perkalian matriks berlaku juga hukum distributif

$$A(B + C) = AB + AC$$

1.7. Matriks-Matriks Khusus

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa matriks khusus

1.7.1. Matriks Nol

Suatu matriks $m \times n$ disebut matriks nol dan dinyatakan dengan $0_{m \times n}$ jika semua elemen matriks itu nol. Untuk semua matriks A maka operasinya dengan matriks nol akan menghasilkan sifat:

a. $A + 0 = A$

b. $A - A = 0$

c. $A0 = 0$

d. $0A = A$

Matriks nol dapat dihasilkan dari perkalian dua matriks yang tidak nol. Jika A dan B tidak matriks nol tetapi AB dapat menghasilkan mastriks nol.

Contoh: Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, jelas $A \neq 0$ dan $B \neq 0$

Tetapi $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.7.2. Matriks Identitas

Salah satu matriks yang sangat penting adalah matriks identitas. Matriks identitas merupakan suatu matriks bujur sangkar dengan elemen diagonal utamanya 1 (satu) dan elemen yang lain adalah 0 (nol). Suatu matriks identitas $n \times n$ diyantakan dengan simbol I_n.

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen dari I_n dapat juga dinyatakan sebagai simbol delta kronecher δ_{ij} yang didefinisikan sebagai:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1..jika\ i = j \\ 0..jika\ i \neq j \end{cases}$$

Sehingga dapat ditulis: $I_n = [\delta_{ij}]$

Salah satu sifat matriks identitas $n \times n$ adalah dia komut dengan matriks apapun yang berorde $n \times n$.

Jadi: $AI = IA$

1.7.3. Matriks Konstan

Jika semua elemen diagonal matriks identitas dapat berupa angka selain satu, katakanlah a misalnya, maka matriks ini kita sebut matriks konstan atau tetap. Matriks konstan dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$ atau dalam simbol lain $(A)_{ij} = a\,\delta_{ij}$

dimana a merupakan suatu skalar.

Dapat kita tuliskan bahwa jika A suatu matriks konstan, maka $A + aI$ dimana I merupakan matriks identitas.

1.7.4. Matriks Transpose

Definisi: transpose dari suatu matriks A yang berorde $m \times n$ adalah matriks yang berorde $n \times m$.

Matriks transpose dihasilkan dari pertukaran baris dan kolom dari matriks A. Kita nyatakan transpose dari A adalah A^T. Untuk elemen matriks kita dapatkan:

$$a^T{}_{ij} = a_{ij}$$

Contoh:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ maka $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Beberapa sifat matriks transpose:

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + C)^T = A^T + C^T$

c. $(AB)^T = B^T A^T$

Sifat a dan b dengan mudah dapat dibuktikan, sedangkat sifat c dapat dibuktikan bahwa $[(AB)^T]_{ij} = [B^T A^T]_{ij}$.

Dari definisi matriks transpose kita dapatkan:

$[(AB)^T]_{ij} = [B^T A^T]_{ij}$ (dari definisi matriks transpose)

$= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ (dari definisi perkalian matriks)

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b^T{}_{ik} a^T{}_{kj}$$

$$= \left[B^T A^T\right]_{ij}$$

Dari transpose suatu matriks kita dapat mengenal dua jenis matriks lain yaitu matriks simetri dan matriks anti simetri.

Definisi: jika A suatu matriks $m \times n$ maka jika

1. $A^T = A$ atau $a_{ji} = a_{ij}$ maka A disebut matriks simetri.
2. $A^T = -A$ atau $a_{ji} = -a_{ij}$ maka A disebut matriks anti simetri

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ terlihat $a_{ji} = a_{ij}$, maka

A matriks simetri.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ terlihat } a_{ji} = -a_{ij},$$

maka B matriks anti simetri.

1.7.5. Matriks Hermitz

Ingat kembali suatu bilangan kompleks Z dapat ditulis sebagai $Z = a + ib$. Konjuget dari Z atau $\bar{Z} = a - ib$. Jika A suatu matriks kompleks, yang mana elemen-elemennya terdiri dari bilangan kompleks. Sebagai contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ 4-i & 3+2i \end{bmatrix}$$

maka A konjugat atau $\bar{A}$ adalah $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 3 \\ 4+i & 3-2i \end{bmatrix}$

Apabila kita melakukan operasi transpose kemudian konjugat terhadap matriks A maka kita dapatkan Hermitz konjugat dengan simbol A^T. Dapat ditulis cara untuk mendapatkan matriks A^+ untuk A suatu matriks Kompleks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & . & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & . & \overline{a_{2n}} \\ \overline{.} & \overline{.} & . & \overline{.} \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & . & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow A^+ = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & . & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & . & \overline{a_{m2}} \\ \overline{.} & \overline{.} & . & \overline{.} \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & . & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

jelas bahwa $A^+ = (\bar{A})^T = (\bar{A}^T)$

Suatu matriks kompleks A jika memenuhi kondisi:

a. $A^+ = A$ atau $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$ maka A matriks disebut matriks Hermitz.

b. $A^+ = -A$ atau $\bar{a}_{ij} = -a_{ji}$ maka A matriks disebut matriks anti Hermitz.

Contoh: buktikan setiap matriks bujursangkar dapat ditulis sebagai jumlah matriks Hermitz dan matriks anti Hermitz.

Penyelesaian:

misalkan A suatu matriks bujursangkar dengan orde n dimana A dapat dituliskan sebagai:

$$A = B + C \tag{a}$$

dengan B matriks Hermit dan C matrik anti Hermit. Dari persamaan (a) dapat di tulis elemen $ke - ij$ nya adalah:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \tag{b}$$

jika kita ambil Hermit konjuget dari persamaan (a) didapat:

$$\begin{aligned} A^{+} &= (B + C)^{+} \\ &= B^{+} + C^{+} \text{ atau} \qquad \text{(c)} \\ &= B - C \end{aligned}$$

dengan elemen $ke - ij$ adalah:

$$\bar{a}_{ij} = b_{ij} - c_{ij} \tag{d}$$

dari penjumlahan dan pengurangan (b) dan (c) didapat:

$$b_{ij} = \frac{(a_{ij} + \overline{a_{ji}})}{2} \text{ dan } c_{ij} = \frac{(a_{ij} - \overline{a_{ji}})}{2} \tag{e}$$

sekarang akan kita lihat apakah B Hermit dan C anti Hermit.

Jika diambil konjuget dari persamaan (c) akan didapat:

$$\bar{b}_{ij} = \frac{(\bar{a}_{ij} + a_{ji})}{2} = b_{ij} \quad \text{dan} \quad \bar{c}_{ij} = \frac{(\bar{a}_{ij} - a_{ji})}{2} = -\frac{(a_{ji} - \overline{a_{ij}})}{2} = -c_{ji}$$

Jadi terbukti bahwa B matriks Hermit dan C anti Hermit.

1.7.6. Matriks dengan Elemen-Elemen Polinominal/Suku Banyak

Misalkan suatu matriks dengan orde $m \times n$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & . & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & . & f_{2n}(x) \\ . & . & . & . \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & . & f_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Dimana $f_{ij}(x)$ adalah sutau polinominal x derajat p. Dapat kita tuliskan bahwa:

$$A = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_p x^p$$

Dengan $B_k (0 < k \leq p)$ adalah matriks $m \times n$.

Contoh: misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3x^3 + 2x - 1 & 5x^2 - 3x + 2 & -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ 9x^3 - 3 & 6x + 4 & 7x^2 - 4x \\ 2x^2 - 3x - 10 & x^3 + 6x^2 + x & 6x^3 - 4x^2 + 8 \end{bmatrix}$$

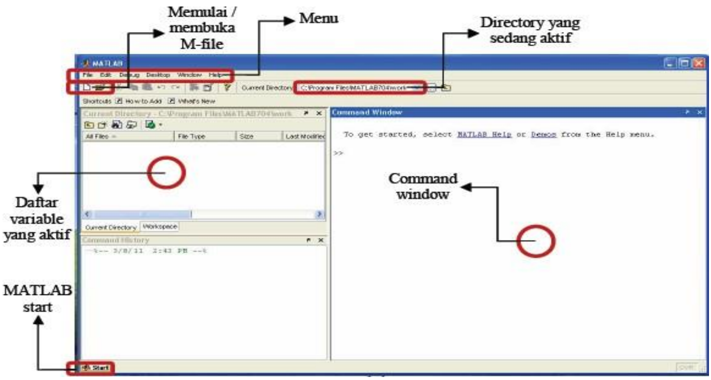
Maka dapat dituliskan

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 0\\ -10 & 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ 0 & 6 & -4\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 7\\ 2 & 6 & -4\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 9 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}x^3$$

1.8. Suplemen: Operasi Matrik menggunakan Matlab

MATLAB (MATrix LABoratory) adalah bahasa tingkat tinggi dan interaktif yang memungkinkan untuk melakukan komputasi secara intensif. MATLAB telah berkembang menjadi sebuah *environment* pemrograman yang canggih yang berisi fungsi-fungsi *build in* untuk melakukan pengelolahan sinyal, aljabar linear dan kalkulasi matematis lainnya.

Setelah melakukan instalasi MATLAB pada PC, perhatikan icon MATLAB pada tampilan desktop kemudian "doubleclick" pada icon tersebut. Selanjutnya akan muncul tampilan seperti pada gambar berikut ini.



Pada command window, semua perintah matlab dituliskan dan diekskusi. Kita dapat menuliskan perintah perhitungan sederhana, memanggil fungsi, mencari informasi tentang sebuah fungsi dengan aturan penulisannya (help), demo program, dan sebagainya. Setiap penulisan perintah selalu diawali dengan prompt ‘>>’.

Beberapa fungsi yang dapat dipakai dalam Matlab untuk menyelesaikan beberapa masalah aljabar matrik adalah

Operator numerik dan matrik

>> ± : penjumlahan dan penguragan

>> *, ^ : perkalian dan perpangkatan

>> /, \ : pembagian kanan untuk bilangan dan pembagian kiri untuk matrikdan vektor

>> ‘ : transpose vektor atau matrik

OPERATOR array

>> ± : penjumlahan dan penguragan

>> .*,. ^ : perkalian dan perpangkatan

>> ./, .\ : pembagian kanan untuk bilangan dan pembagian kiri untuk matrikdan vektor

>> ‘ : transpose vektor atau matrik

Penambahan titik dalam operator array disebabkan adanya operasi sederetan bilangan dalam waktu yang bersamaan. Contoh array *x = 0:0.1:10*

Terdapat 3 jenis format data di MATLAB yaitu skalar, vektor dan matriks.

- Skalar, ialah suatu bilangan tunggal
- Vektor, ialah sekelompok bilangan yang tersusun 1-dimensi. Dalam MATLAB biasanya disajikan sebagai vektor-baris atau vektor-kolom
- Matriks, ialah sekelompok bilangan yang tersusun

dalam segi-empat 2-dimensi. Di dalam MATLAB, matriks didefinisikan dengan jumlah baris dan kolomnya. Di MATLAB terdapat pula matriks berdimensi 3, 4, atau lebih, namun dalam buku ini kita batasi hingga 2-dimensi saja.

Sebenarnya, semua data bisa dinyatakan sebagai matriks. Skalar bisa dianggap sebagai matriks satu baris – satu kolom (matriks 1×1), dan vektor bisa dianggap sebagai matriks 1-dimensi: satu baris – n kolom, atau n baris – 1 kolom (matriks 1×n atau n×1). Semua perhitungan di MATLAB dilakukan dengan matriks, sehingga disebut MATrix LABoratory.

Matriks didefinisikan dengan kurung siku ([ ]) dan biasanya dituliskan baris-per-baris. Tanda koma (,) digunakan untuk memisahkan kolom, dan titik-koma (;) untuk memisahkan baris. Kita juga bisa menggunakan spasi untuk memisahkan kolom dan menekan Enter ke baris baru untuk memisahkan baris. Untuk jelasnya mari kita praktekkan contoh berikut ini.

```
>> A=[0 1;2 3];
>> B=[4 5;6 7];


>> Jumlah=A+B,
Selisih=A-B,
Tambah50=A+50Jumlah
=
         4    6
         8    10


Selisih =
         -4
              -4
         -4   -4
Tambah50 =
         50   51
         52   53
```

Selain itu, perkalian juga bisa dilakukan antara matriks dengan skalar.

Kita akan lanjutkan contoh sebelumnya.

```
>> A,B
A=
          0    1
          2    3
B =
          4    5
          6    7


>> MultAB=A*B, MultBA=B*AMultAB =


MultAB =  6
         26
MultBA =   10
             14
```

1.9. Latihan

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, hitunglah

   $2A, -3B, A - 2B, 3A + 4B$

2. Misalkan

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & 6 & -2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$ dan

$$D=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Hitunglah jika memungkinkan AB, BC, CA, DC, DB, AD dan CD.

3. Diketahui matriks Spin Pauli $\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

   Buktikan bahwa $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$.

4. Jika $A_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}, A_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ dan $A_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$

   Buktikan $[A_1, A_2] = A_3, [A_2, A_3] = A_1, [A_3, A_1] = A_2$

5. Jika A, B, dan C matriks orde $m \times m$, buktikan identitas Jacobi:

   $\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0.$

BAB II

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Deskripsi Singkat

Dalam beberapa persoalan kita sering dihadapkan pada beberapa masalah yang melibatkan beberapa persamaan. Untuk mendapatkan dimana atau pada hal mana persaaan tersebut berlaku, kita harus mencari penyelesaian persamaan tersebut, yang dikenal dengan penyelesaian sistem persamaan linier.

Capaian Pembelajaran

Mahasiswa mampu mencari penyelesaian system persamaan linier dengan metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, dan matrik invers serta dapat mengaplikasikannya untuk mempelajari pengetahuan fisika sesuai dengan perkembangan sains dan teknologi.

2.1. Terminology dan Notasi

Sebuah garis dalam ruang xyz dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linier dengan variabel $x, y, dan\ z$. Lebih umum persamaan ini dapat ditulis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dengan a_i adalah suatu konstanta. Variabel x_i pada persmaan diatas tidak boleh berupa fungsi trigonometri, logaritma, fungsi eksponensial, maupun pangkat perkalian dua fungsi. Persamaan-persamaan berikut bukan merupakan persamaan linier:

$$2x + 3y^2 = 5$$

$$x - \sin y = 0$$

$$xy + y = 7$$

Penyelesaian persamaan linier $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ merupakan urutan bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_\infty$ sehingga jika kita substitusikan $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_\infty = s_\infty$ akan memenuhi persmaan tersebut. Himpunan semua Penyelesaian persamaan ini kita sebut himpunan Penyelesaian.

Contoh: Carilah himpunan Penyelesaian persamaan:

i). $4x - 3y = 1$

ii). $x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$

Penyelesaian: Untuk mencari Penyelesaian persamaan tersebut kita menetapkan dahulu sebarng nilai untuk salah satu dari variabel persamaan. Misalnya untuk persamaan (i) kita ambil $y = s$ maka didapatkan:

$$y = s \qquad x = \frac{1+3s}{4}$$

Jika kita ambil $s = 1$ maka didapatkan $y = 1$ dan $x = 1$.

Untuk persamaan (ii) kita tetapkan terlebih dahulu nilai x_3 dan x_2. Misalkan $x_3 = s$ dan $x_2 = t$ maka didapatkan $x_1 = 5 - t + 3s$

Jika persaman linier yang kita miliki lebih dari satu, katakanlah m, maka dikatakan kita memiliki sistem persamaan liner. Secara umum sistem persamaan linier (SPL) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Dengan koefisien sistem a_{ij} dan sistem tetapan skalar b_j. Jika $b_j = 0$ untuk semua j maka sistem persamaan dikatakan homogen dan sebaliknya dikatakan tidak homogen. Dalam sistem persamaaan linier ada beberapa pertanyaan yang muncul yaitu:

1. Apakah sistem mempunyai Penyelesaian.
2. Jika (1) jawbannya ya, berapa banyak Penyelesaiannya.
3. Bagaimana menentukan seluruh Penyelesaiannya.

Untuk itu ada beberapa kemungkinan dalam Penyelesaian sistem persamaan linier:

a. Tidak ada Penyelesaian.
b. Ada suatu Penyelesaian.
c. Memiliki Penyelesaian tak hingga.

Jika kita tinjau tiga persamaan bidang itu adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

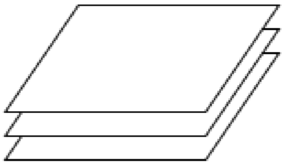
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

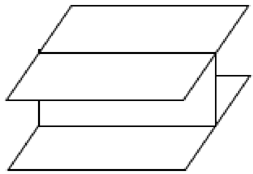
Kemingkinandari ketiga bidang itu adalah:

1. Ketiga bidang tidak berpotong.
2. Ketiga bidang berpotong pada satu titik.
3. Ketiga bidang berpotongan pada satu garis.

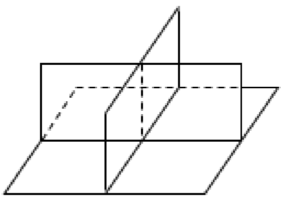
Kasus pertama berhubungan dengan tidak adanya Penyelesaian. Untuk ini berarti ketiga bidang pararel



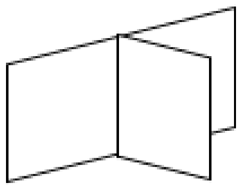
Bidang sejajar



Tidak berpotongan antara ketiga bidang



Bidang-bidang berpotongan pada satu titik



Bidang-bidang berpotongan pada satu garis

Gambar 2.1. Interprestasi geometri dari Penyelesaian system tiga persamaan linier dengan tiga variabel

Contoh: carilah Penyelesaian sistem persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 13$$

Penyelesaian: jika persamaan (1) dijumlah dengan persamaan (2) didapat:

$$3x_1 + 9x_2 = 15 \text{ atau } x_1 + 3x_2 = 5$$

Misalkan $x_2 = s$ maka didapat $x_1 = 5 - 3s$ masukkan x_1 dan x_2 ke dalam salah satu persamaan, didapatkan:

$$x_3 = -3 + 2s$$

Himpunan Penyelesaian sistem persamaan adalah $(5 - 3s, s, -3 + 2s)$.

Untuk suatu sistem persamaan linier:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

dapat ditulis dalam bentuk perkalian matrik

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & : & a_{2n} \\ . & . & : & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lebih singkat ditulis dengan notasi $Ax = b$ dengan A matriks koefisien, x matriks variabel dan b matriks hasil.

Jika matrik koefisien A kita gabung atau diperluas dengan matriks hasil, maka matriks ini kita sebut dengan matriks yang diperbesar atau matriks Augmented.

$$\text{Augmented } A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & : & a_{2n} & b_2 \\ . & . & : & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

2.2. Operasi Baris Elementer

2.5.1. Operasi Baris Elementer

Langkah pertama untuk mendapatkan Penyelesaian sistem persamaan linier adalah tanpa mengubah sistem persamaan.

Contoh: misalkan kita memiliki persamaan berikut:

1. $x + x + x_3 = 2$
2. $2x - 5x + 3x_3 = 6$
3. $4x + 6x - 7x_3 = 8$

jika kita tukar persamaan (1) dengan (2) kita dapatkan

$$2x - 5x + 3x_3 = 6$$

$$x + x + x_3 = 2$$

$$4x + 6x - 7x_3 = 8$$

jelas ini akan memiliki Penyelesaian sama dengan sistem persamaan asal begitu juga jika persamaan (2) dikalikan 10, didapatkan:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$20x_3 - 50x_2 + 30x_3 = 60$$

$$4x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 8$$

juga akan memiliki Penyelesaian sama dengan sistem persamaan asal.

Dapat disimpulkan bahwa operasi yang berikut ini tidak akan mengubah nilai Penyelesaian sistem persamaan, yaitu:

1. Perkalian satu persamaan dengan suatu bilangan.
2. Pertukaran antara dua persamaan.
3. Penjumlahan antara dua persamaan.

Ketiga operasi di atas akan mendasari pencarian Penyelesaian sistem persamaan linier dengan operasi baris.

Simbol –simbol yang digunakan dalam operasi baris dapat berupa:

1. $B_1 + B_2$, yang berarti tambahkan baris kedua pada baris pertama.
2. $B_1 + 2B_2$, yang berarti tambahkan 2 kali baris kedua pada baris pertama.
3. $B_1 \leftrightarrow B_2$, tukarkan baris pertama dengan baris kedua.

Langkah untuk mendapatkan Penyelesaian sistem persamaan linier adalah

1. Susunlah sistem persamaan linier tersebut dalam bentuk matriks.
2. Bentuklah matriks Augmented dari matriks koefisien dengan matriks hasil.
3. Lakukanlah pertukaran, perkalian baris dengan suatu bilangan maupun menjumlahkan antar dua baris.
4. Operasikan baris dihentikan jika matriks koefisien telah menjadi matriks segitiga atas.
5. Untuk mendapatkan semua nilai variabel persamaan lakukan substitusi balik.

2.5.1. Elimansi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan

Untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan eliminasi Gauss tidak lain adalah melakukan langkah yang telah ditetapkan diatas sebagai berikut:

Contoh: carilah Penyelesaian sistem persamaan berikut:

$3x_1 - 2x + 2x_3 = 9$

$x - 2x + x_3 = 5$

$2x - x - 2x_3 = 1$

Penyelesaian: pertama kita bentuk matriks Augmented dari matriks koefisien.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 1: $B_1 \leftrightarrow B_2 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Langkah 2: $\begin{matrix} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -4 & -11 \end{bmatrix}$

Langkah 3: $B_2 - B_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -11 \end{bmatrix}$

Langkah 3: $B_3 - 3B_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & -26 \end{bmatrix}$

Dari baris ke tiga didapatkan $-13x_3 = -26$ atau $x_3 = 2$. dengan melakukan sustitusi balik ke baris ke dua dan satu didapatkan $x_1 = 1$ dan $x_2 = -2$. Jadi himpunan Penyelesaian persamaan adalah $P = \{(1, -2,2)\}$.

Proses yang dilakukan diatas disebut dengan Eliminasi Gauss.

jika langkah ke 4 dilanjutkan dengan:

$$\text{Langkah 5: } \begin{matrix} B_3 : (-3) \\ B_1 + 2B_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Langkah 6: } \begin{matrix} B_1 - 7B_3 \\ B_2 - 3B_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sampai dengan langkah ke 6 ini operasi yang kita lakukan disebut dengan Eliminasi Gauss-Jordan. Dari bagian berikut kita dapatkan gambaran tentang eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan.

1. Eliminasi Gauss

Matriks Augmented A $\xrightarrow{Operasi\ baris}$ matriks segi tiga atas Augmented A.

2. Eliminasi Gauss-Jordan

   Matriks Augmented A $\xrightarrow{Operasi\ baris}$ Matriks Satuan I.

2.3. Sistem Persamaan Linier Homogen

Dalam beberapa hal kita ingin mendapatkan solusi dari sistem persamaan linier dengan matriks hasilnya nol. Ingat kembali sistem persamaan linier dapat kita tulis dalam bentuk $Ax = b$. Jika $b = 0$, maka kita akan memiliki sistem persamaan linier yang homogen, $Ax = 0$. Salah satu keistimiwaan SPL homogen adalah selalu konsisten. SPL ini memiliki dua kemungkinan Penyelesaiannya yaitu:

a. Semua Penyelesaiannya bernilai nol. Penyelesaian ini disebut Trivial (Trivial Solution)
b. Memiliki Penyelesaian tak hingga banyaknya.

Contoh: tentukan Penyelesaian dari: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$$

Penyelesaian: kita lakukan dengan Operasi baris atau Eliminasi Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - B_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] B_3 - 2B_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \frac{B_3}{3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dari matriks terakhir kita dapatkan nilai $x_1 = 0, x_2 = 0, dan\ x_3 = 0.$ Hal ini berarti sistem persamaan yang diberikan memiliki Penyelesaian yang trivial.

Contoh: tentukan Penyelesaian dari:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

Penyelesaian: dari sistem persamaan yang ada kita lihat jumlah variabel yang tidak diketahui lebih banyak dari jumlah persamaan. Hal ini akan memberikan Penyelesaian yang tak trivial. Untuk pemecahnnya kita mulai dari matriks Augmented:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - 3B_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} B_1 + B_2 \\ B_3 - 2B_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kita dapatkan dari matriks Augmented terakhir adalah sistem persamaan:

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 - 5x_3 = 0$$

kita ambil $x_4 = 5$, $x_3 = t$, maka didapat nilai variabel baru $x_1 = 2t$, $x_2 = 5t$. Jadi himpunan penyelesaian persamaan adalah $\{(2t - s, 5t, t, s)\}$.

2.4. Matriks Invers

Misalkan A dan B suatu matriks bujursangkar $n \times n$, jika $AB = I_n$ dengan I_n matriks satuan, maka B disebut Invers dari A dan dinyatakan dengan A^{-1} . Jadi: $AA^{-1} = I_n$

Salah satu sifat matriks invers adalah komut dengan nmatriks asalnya$A^{-1}A = AA^{-1}$. Jadi: $[AA^{-1} = 0]$.

Perhatikan bahwa A^{-1} tidak berarti $1/A$. Suatu matriks bujursangkar yang memiliki invers disebut matriks non singular, sedangkan jika A inversnya tidak ada dikatakan matriks singular.

Contoh: buktikan bahwa $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ adalah matriks inversnya

Penyelesaian: dengan perkalian kita dapatkan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berarti A adalah invers dari B atau B adalah invers dari A.

Beberapa sifat matriks invers, jika A dan B matriks non singular, maka:

1. AB adalah non singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. A^{-1} adalah matriks non singular dan $(A^{-1})^{-1} = A$

3. A^T adalah non singular dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. A^T adalah non singular dan $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$
5. Jika $A^T = A^{-1}$ maka A disebut Matriks ortogonal

2.4.1. Penggunaan matriks invers dalam menyelesaikan SPL

Adanya matriks invers akan lebih memudahkan kita dalam menyelesaikan SPL, jika kita memiliki SPL yang jumlah persamaannya sama dengan jumlah variabel yang tidak diketahui, maka invers dari matriks A dapat dihitung.

dari SPL: $Ax = b$

Jika A memiliki invers (non singular), maka jika kita kalikan A^{-1} ke persamaan (*) dari kiri kita akan dapatkan: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Perlu diperhatikan, pengalian matriks invers pada persamaan SPL tidak boleh dari kanan karena syarat pengalian dua matriks tidak akan dipenuhi.

Contoh: misalkan A_{nxn} dengan invers A_{nxn}^{-1} matriks x_{nx1} dan b_{nx1} maka jika kita lakukan pengalian dari kanan kita dapatkan:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1}A_{n\times n}^{-1} = b_{n\times 1}X_{n\times n}$$

Tidak dapat dikalikan

Contoh: suatu SPL Ax =b dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Carilah penyelesaiannya.

Penyelesaian: dari contoh sebelumnya didapat $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

dengan mengalikan A^{-1} pada persamaan $Ax = b$ dari kiri didapat

$$X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Berarti himpunan pemecahnya adalah $P = \{(2, 3, 2)\}$.

2.4.2. Mencari invers dengan Eliminasi Gauss-Jordan

Misalkan A suatu matriks bujursangkar, maka dengan menggunakan teknik eliminasi Gauss-jordan, kita akan dapatkan matriks invers dari A. Skema proses pencarian itu sebagai berikut:

1. Buatlah matriks A yang diperluas dengan matriks satuannya.
2. Lakukan operasi eliminasi Gauss-Jordan sampai kedudukan matriks A semula menjadi matriks satuan dan tempat kedudukan matriks I semula adalah invers yang dicari.

$$[A\ I_n] \xrightarrow{Eliminasi\ Gauss} [I_n\ A^{-1}]$$

Contoh: carilah invers $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ dengan teknik eliminasi Gauss-Jordan.

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 - 3R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_3 - 2R_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] R_3 : -1/4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/14 & 1/7 & -1/14 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_2 - 2R_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 11/14 & -8/7 & 1/14 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 5/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/14 & 1/7 & -1/14 \end{array}\right]$$

Maka, $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 11 & -16 & 1 \\ -6 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2.5. Suplemen: Penerapan Gauss Jordan dengan Matlab

Contoh:

Terdapat 3 bahan Q, R dan S untuk menghasilkan suatu larutan kimia. Q, R dan S harus dilarutkan dalam air secara terpisah sebelum dicampur. Misalkan Q berisi 1,4 g/cm^3 dicampur dengan R 3,5 g/cm^3 dan S 5.5 g/cm^3 membuat larutan kimia 25,05 g. Bila perbandingan Q, R dan S dalam larutan berubah menjadi 2,4, 4,2 dan 2,6 g/cm^3, maka 22,65 g larutan kimia dihasilkan. Bila perbandingannya 3,7, 4,5 dan 4,2 g/cm^3, maka larutan kimia yang dihasilkan 27,54 g. Berapa volume (cm^3) larutan berisi A, B dan C?

Dari contoh tersebut, dapat dibuat persamaan liniernya menjadi

$$1{,}4x + 3{,}5y + 5{,}5z = 25{,}05$$

$$2{,}4x + 4{,}2y + 2{,}6z = 22{,}65$$

$$3{,}7x + 4{,}5y + 4{,}2z = 27{,}54$$

Augmented matrix sistem ini adalah

$$\begin{bmatrix} 1.4 & 3.5 & 5.5 & 25.05 \\ 2.4 & 4.2 & 2.6 & 22.65 \\ 3.7 & 4.5 & 4.2 & 27.54 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan program Matlab, maka dilakukan

```
>> A=[1.4,3.5,5.5;2.4,4.2,2.6;3.7,4.5,4.2]

A =

         1.4000    3.5000    5.5000
         2.4000    4.2000    2.6000
         3.7000    4.5000    4.2000
>> b=[25.05;22.65;27.54]

b  = 25.0500

   22.6500

   27.5400


>> x=Gauss_Jordan(A,b)

n =

     3

m =

      3

 x =

     0.4715
```

```
3.9241

1.9374
```

Jadi volume A = 0.4715 g, B = 3.9241 g dan C = 1.9374 g

2.6. Latihan

Untuk soal nomer. 1-3 carilah Penyelesaian SPL dengan menggunakan Eliminasi Gauss

1. $3x_1 - x_2 = 1$

   $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4$

   $7x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -3$

2 $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$

   $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2$

   $5x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5$

3 $2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

   $3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0$

   $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

   $5x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$

Untuk soal 4 dan 5 gunakan A^{-1} untuk mendapatkan Penyelesaiannya

4. $x_1 + 3x_2 = 1$

   $2x_1 + 5x_2 = 3$

5. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1$

   $2x_1 + 10x_2 + x_3 = 1$

   $4x_1 + x_2 + 8x_3 = 1$

   $x_1 + 3x_2 = 1$

BAB III
DETERMINAN

Deskripsi Singkat

Determinan memegang peranan yang sangat penting dalam teori persamaan diferensial linier maupun sistem linier persamaan diferensial. Selain itu aplikasi determinan juga digunakan dalam geometri koordinat dan teori fungsi. Untuk memahami penngertian determinan kita mulai dari masalah permuatasi.

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bahasan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep determinan, menentukan minor dan kofaktor suatu matriks bujursangkar, mendapatkan matriks invers dengan determinan, serta dapat memahami aplikasi determinan dalam berbagai masalah.

3.1. Permutasi

Misalkan kita memiliki beberapa bilangan posistif 1, 2, ..., n, banyaknya susunan bilangan tersebut katakanlah $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ disebut permutasi.

Contoh: bilangan 1, 2, 3 akan memiliki 6 permutasi yang berbeda yaitu (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1).

Sebuah invers (*invertion*) terjadi dalam permutasi iika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan yang terkecil. Cara memperoleh banyaknya invers dalam permutasi adalah dengan cara membawa bilangan terkecil ke depan bilangan yang besar dan ini kita nyatakan dengan $N(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$.

Contoh: permuatasi (1,3,2,4,5), kita lihat bahwa dalam permutasi ini ada sebuah bilangan kecil di belakang bilangan yang besar yaitu bilangan 2 di belakang 3. Untuk menyusun permutasi ini menjadi (1,2,3,4,5) diperlukan satu langkah. Jadi N(1,2,3,4,5)= 1.

Contoh: hitunglah banyaknya invers permutasi (6,1,3,4,5,2)

Penyelesaian:

1. Untuk membawa 1 ke depan ada 1 langkah
2. Untuk membawa 2 ke depan ada 4 langkah
3. Untuk membawa 3 ke depan ada 1 langkah
4. Untuk membawa 4 ke depan ada 1 langkah
5. Untuk membawa 5 ke depan ada 1 langkah

Jadi, $\mathrm{N}(6,1,3,4,5,2) = 1 + 4 + 1 + 1 + 1 = 8$ langkah

Suatu permutasi paritasnya dikatakan genap jika jumlah inversnya bilangan genap dan ganjil jika jumlah inversnya bilangan ganjil. Untuk permutasi genap diberi tanda positif satu dan untuk permutasi ganjil diberi tanda minus satu.

$$\sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) = \begin{cases} 1, jika\ (P_1, P_2, P_3, \dots, P_N)\ berparitas\ genap \\ -1, jika\ (P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) berparitas\ ganjil \end{cases}$$

dimana $\sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N)$ tanda permutasi, dapat diungkapkan dengan menggunakan

$N(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N)$ atau $\sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) = (-1)^{N(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N)}$

Contoh: $\sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) = (-1)^1 = -1$

$\sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_N) = (-1)^8 = 1$

3.2. Definisi Determinan

Untuk melihat definisi dari determinan kita struktur Penyelesaian $n \times n$ SPL dalam beberapa kasus.

Kasus 1: Untuk n=1 dengan sistem $a_{11}x_1 = b_1$ dengan $A = a_{11}$

Maka didapatkan $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ sehingga determinan 1×1 adalah $\det(A) = a_{11}$

Kasus 2:

Untuk n=2 dengan SPL: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ dan $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ yang memiliki Penyelesaian $x_1 = \frac{a_{11}b_1 + a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}$ dan $x_2 = \frac{a_{11}b_2 + a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}$ memberikan determinan 2×2 adalah $\det(A) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$

Setiap determinan mengandung n! Perkalian. Tiap perkalian mengandung satu elemen dari tiap baris dan satu elemen dari tiap kolom pada matriks koefisien. Selain itu tiap suku juga mengandung tanda positif dan negatif.

Contoh: untuk $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

Definisi: misalkan $[A = a_{ij}]$ matriks n x n maka determinan didefinisikan dengan

$$\text{Det}(A) = \sum \sigma(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) a_{1p1}a_{2p2}a_{3p3} \dots a_{npn}$$

Dimana jumlahnya adalah n! Permutasi $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ yang berbeda.

Contoh: menentukan determinan berdasarkan definisi untuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

berarti $\det(A) = \sigma(P_1, P_2, P_3) a_{1p1} a_{2p2} a_{3p3}$

permutasi dari bilangan 1,2,3 adalah (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1). terlihat jumlah permutasinya 3! =6.

Determinan dari $A = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ dapat disimbolkan dengan $\det(A) = \begin{vmatrix} \end{vmatrix}$, untuk $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$

paritas determinannya adalah:

$$\begin{matrix} \sigma(1,2,3) = +1 & \sigma(1,3,2) = -1 \\ \sigma(2,3,1) = +1 & \sigma(2,1,3) = -1 \\ \sigma(3,1,2) = +1 & \sigma(3,2,1) = -1 \end{matrix}$$

$$\text{jadi, } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \sigma(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31} + \sigma(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32} + \sigma(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} + \sigma(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3.3. Minor dan Kofaktor

Determinan diatas dapat ditulis dengan

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Suku–suku dalam tanda kurung dapat lagi kita tulis dengan determinan untuk matriks 2×2

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Tiap suku determinan diatas disebut dengan minor ada elemen di depannya. Minor dari elemen ke ij disimbolkan dengan M_{ij}. Dari hal diatas didapat:

M_{11} adalah $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ dan M_{12} adalah $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Jadi terlihat M_{ij} artinya adalah determinan dari matriks dengan elemen yang tidak termasuk baris ke i dan kolom ke j. Dalam menghitung determinan diatas kita juga melibatkan tanda positif dan negative untuk jumlah dari perkalian elemen dengan minor yang terkait.

Jika kita gabung tanda positif dan negatif dengan minor, kita akan dapatkan apa yang disebut Kofaktor (C). Kita lihat untuk elemen a_{11} didapat tanda positif dan untuk elemen a_{12} tanda negatif. Dapat dituliskan untuk elemen a_{ij} tandanya adalah $(-1)^{i+j}$dan kofaktor dari elemen ke ij adalah $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Berdasarkan hal ini dapat kita kembangkan bahwa determinan ini dapat ditulis sebagai jumlah perkalian suatu baris atau kolom dengan kofaktornya.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Dengan a^{ij} adalah elemen suatu baris atau kolom. Sebagai contoh kita ambil matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

determinannya dapat ditulis:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

yang diambil disini adalah elemen baris pertama, tetapi tidak dilarang untuk mengambil elemen baris atau kolom lain.

Contoh: hitunglah determinan dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

kita gunakan kolom kedua, perhitungan

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{gunakan kolom ketiga}$$

$$= -1(-2)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(15-3) = 24$$

3.4. Sifat –sifat Determinan

Dengan mengetahui sifat-sifat determinan kita dapat menghitung determinan untuk matriks yang lebih besar. Beberapa sifat yang diberikan adalah:

1. Jika suatu baris atau kolom dari matriks ditukarkan, maka determinannya menjadi negativ.

   Contoh: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\det(A) = 4 - 3 = 1$

   Jika $B_1 \leftrightarrow B_2$ didapat $A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A^1) = 3 - 4 = 1$

Atau $K_1 \leftrightarrow K_2$ didapatkan $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A^1) = 3 - 4 = 1$

2. Jika suatu baris atau kolom dari matriks dikalikan dengan suatu bilangan k, maka determinannya menjadi k dikali determinan semula.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 1$, $B_1 \times 5$ maka $A^1 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

dengan $\det(A^1) = 20 - 15 = 5 \; atau \; 5 \det(A)$

3. Jika elemen suatu baris atau kolom identik dengan elemen baris atau kolom lain, determinannya sama dengan nol.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ kita lihat baris ketiga kelipatan 2 baris pertama

$$\det(A) = 1(5.6 - 2.4) - 2(4.6 - 2.2) - 3(4.4 - 2{,}5) = 0$$

4. Determinan tidak akan berubah jika elemen satu baris atau kolom ditambah atau dikurangkan dengan kelipatan kolom atau baris lain.

Contoh: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} K_1 + K_2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 5 = 1$

$$\text{Atau } B_2 - B_1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

5. Jika elemen satu kolom atau baris hanya satu yang tidak nol, maka determinannya dengan elemen tersebut dikalikan kofaktornya.

Contoh: $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 17 & 5 \end{vmatrix}$ $maka$ $\det(A) =$ $+5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 5(5 - 15) = -50$

6. Untuk matriks segitiga atas atau bawah, maka determinannya adalah perkalian elemen diagonal utamanya

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ij} \ dengan\ \eta a_{ij} = a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

Contoh: $\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$7.1(-1)(2) = -14$

7. Jika elemen satu baris atau satu kolom dari matriks, maka determinannya adalah nol.
8. Determinan perkalian dua matriks sama dengan determinan perkalian kedua matriks tersebut $\det(AB) = \det(A)\,.\det(B)$

Berdasarkan sifat-sifat determinan diatas kita dapat menghitung determinan suatu matriks tanpa menggunakan permutasi, tetapi kita gunakan noperasi baris atau kolom.

Contoh: carilah determinan dari $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{vmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} B_1 \leftrightarrow B_2 \\ B_4 : 2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - 3B_1 \\ B_4 - B_1 \end{matrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} B_2 \leftrightarrow B_4 \\ B_3 : 10 \end{matrix} -$$

$$2(-10)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_3 - B_2 \\ B_4 - 3B_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 16 \end{vmatrix} B_4 -$$

$$5B_3\ 20\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$maka \det(A) = 20(1.1)(-1)(-4)) = 80$$

3.5. Determinan dan Matriks Invers

Sebelum kita masuk kepada mencari invers matrik dengan menggunakan determinan, terlebih dahulu kita perlu mengenal matriks adjoint.

Definisi: matriks adjoint adalah matriks transpose dari matriks kofaktor dan ini dinyatakan adj(A).

Contoh: tentukan adj(A) jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian: dari matriks A diperoleh Kofaktornya

$$\begin{matrix} C_{11} = 8 & C_{12} = 12 & C_{13} = -13 \\ C_{21} = 6 & C_{22} = 9 & C_{23} = 4 \\ C_{31} = 15 & C_{32} = -5 & C_{33} = 10 \end{matrix}$$

Kita bentuk kofaktor dari A menjadi $C = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -13 \\ 6 & 9 & 4 \\ 15 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

dan $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 12 & 9 & -5 \\ -13 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Jika A bukan matriks singular, maka invers A dapat dicari dengan cara menggunakan determinan dan C^T dimana $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{\det\,(A)} C^T$

Contoh: carilah invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian: Pada Penyelesaian sebelumnya kita dapatkan $C^T = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 12 & 9 & -5 \\ -13 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ dandet$(A) = 55$

Sehingga, $A^{-1} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 12 & 9 & -5 \\ -13 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

3.6. Aturan Cramer

Untuk menyelesaikan sistem linear dengan *n* persamaan dan *n* faktor yang tidak diketahui dengan cara menentukan **determinan** matriks diperbesar dari sistem persamaan linear tersebut terlebih dahulu kemudian dicari nilai *n* faktor masing-masing. Aturan Cramer memenuhi ketentuan sebagai berikut:

- Bila Ax = b, det(A) ≠ 0, maka sistem mempunyai solusi unik, di mana:

$$x_1 = \frac{\det\,(A_1)}{\det A}; x_2 = \frac{\det\,(A_2)}{\det A}; x_n = \frac{\det\,(A_n)}{\det A}$$

- Aj matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entripada kolom ke-j dari A dengan entri matriks

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh : $2x_1 + x_2 = 7$

$x_1 + 2x_2 = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_1 = \frac{11}{3}; \quad x_2 = \frac{-1}{3}$$

3.7. Suplemen: Menghitung Determinan dengan menggunakan Matlab

Tentukan determinan dari matrik Q

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Kita dapat mengunakan MATLAB untuk mendapatkan solusi secara cepat:

```
>> Q=[3 3 0 5;2 2 0 -2;4 1 -3 0;2 10 3 2];

>> det(Q)ans =


  -240
```

Penyelesaian SPL menurut aturan Cramer dapat menggunakan MATLAB. Dalam MATLAB tidak ada *function* khusus menyelesaikan SPL dengan aturan Cramer, sehingga dapat kita buat sendiri dengan *file* berekstensi **.m**, kita sebut aja **cramer.m,** adapun *listing* programnya sebagai berikut:

```
function x = cramer(A, b)


% cramer Solve the system Ax=b.

% The matrix A is square and invertible.

%

% x = cramer(A, b) solves the square system Ax =
b.


[m, n] = size(A);
if m ~= n

  error('Matrix is not square.')
end

if det(A) == 0
```

Contoh: Selesaikan SPL berikut dengan menggunakanaturan Cramer

$$2x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

Untuk menyelesaikan SPL ini, harus dibuat dulu matriks A dan b nya, sesuai aturan Cramer Ax = b.

```
>> A=[2 1;1 2]
A =
     2     1
     1     2
>> b=[7;3]
b =
     7
     3
```

Kemudian kita panggil *function* yang telah kita buat

```
>> x=cramer(A,b)
x =

    3.6667
```

Jadi dari hasil MATLAB, untuk nilai

$$x_1 = 3.6667 = \frac{11}{3}$$
$$x_2 = -0.3333 = \frac{-1}{3}$$

Latihan

1. Carilah banyaknya invers dari {1,2,3,4,5}
2. Carilah determinan berikut

a). $\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k=1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

dengan menggunakan permutasi dan sifat determinan.

3. Carilah invers dari

a). $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. Carilah nilai x,y,z untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$

jika A tidak matriks singular.

BAB IV

VEKTOR DALAM KOORDINAT TIGA DIMENSI

Deskripsi Singkat

Pada bagian ini akan kita bahas mengenai perkalian vektor, operator vektor, diadik yang merupakan bagian yang sangat banyak digunakan dalam bidang fisika.

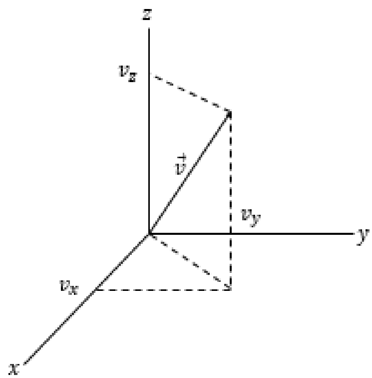
Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan dapat menghitung perkalian skalar dua vektor, vektor dari dua vektor, mengerti penggunaan vektor dalam berbagai persoalan pada fisika, gradien dari suatu medan skalar, divergensi dari suatu medan vektor, rotasi dari medan vektor, serta peserta didik dapat mengerti penggunaan vektor dalam berbagai persoalan pada fisika salah satunya momen inersia.

4.1. Aljabar Vektor dalam Tiga Dimensi

4.2.1. Definisi dan Perkalian Skalar

Suatu vektor dalam ruang tiga dimensi kartesian dapat dinyatakan sebagai himpunan tiga bilangan yang teratur yang disebut dengan komponen-komponen vektor, misalnya $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$.



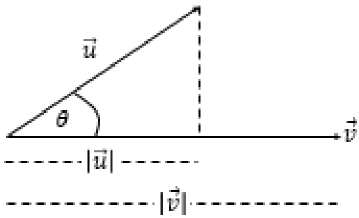
Gambar 4.1. komponen vektor dalam ruang

Besar atau panjang $\vec{v}$ dinyatakan dengan $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Jika kita memiliki dua vektor, misalnya $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ dan $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, maka untuk menjumlahkannya dilakukan dengan cara menjumlahkan masing-masing komponennya:

$$\vec{v} + \vec{u} = v_x + u_x, v_y + u_y, v_z + u_z$$

Perkalian skalar

Perkalian skalar dari dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$ dengan θ adalah sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$



Jika kita gunakan komponen-komponen dalam ruang xyz untuk vektor ini, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ dan $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ kita akan dapatkan:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z)$$

$$= (v_x + u_x, v_y + u_y, v_z + u_z) = \sum_{i=1}^{j} u_i v_i$$

Hal ini disebabkan komponen-komponen yang tidak searah seperti u_x dan v_y adalah saling tegak lurus ($\theta = 90°$) sehingga dapat ditulis:

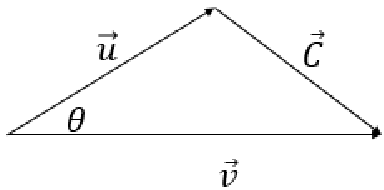
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{j} u_i v_i = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

Misalkan kita memiliki dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ yang tidak nol, maka jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ hal ini berarti kedua vektor saling tegak lurus atau disebut Ortogonal.

Berdasarkan perkalian skalar kita dapat mendefinisikan besar suatu vektor tidak lain perkalian titik vektor itu sendiri.

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2 + \vec{v}_z^2$$

Contoh: buktikan bahwa $C^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta$



Gambar 4.2. Pengurangan dua vektor

Dari gambar terlihat bahwa $\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}$

Dengan menggunakan perkalian skalar didapat:

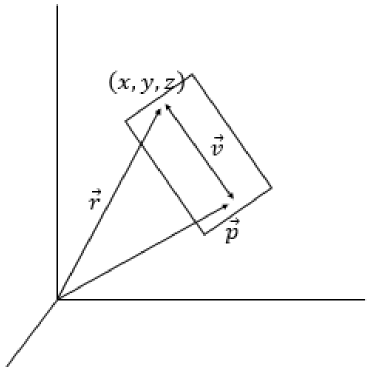
$$\vec{c}.\vec{c} = (\vec{v} - \vec{u})(\vec{u} - \vec{v})$$

$$= u^2 + v^2 - 2\vec{u}\vec{v}$$

$$= u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta$$

Contoh:

Buktikan bahwa persamaan bidang dapat dinyatakan dengan $\vec{p}.\vec{r} = p^2$ dimana $\vec{r} = (x, y, z)$, vektor posisi dari titik asal ke titik (x, y, z) yang berada pada bidang dan $\vec{p}$ adalah vektor dari titik asal yang tegak lurus terhadap bidang.



Gambar 4.3. Persamaan bidang $\vec{p} \cdot \vec{r} = p^2$

Penyelesaian:

Misalkan $\vec{v}$ vektor pada bidang (lihat gambar 4.3). karena $\vec{p}$ tegak lurus terhadap bidang, maka $\vec{v}$ akan tegak lurus pada $\vec{p}$ sehingga $\vec{p}.\vec{v} = 0$ sedangkan $\vec{v} = \vec{r} - \vec{p}$ berarti:

$$\vec{p}.(\vec{r} - \vec{p}) = 0$$

$$\vec{p}.\vec{r} - \vec{p}.\vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}.\vec{r} = p^2 (terbukti)$$

Persamaan ini dapat diungkapkan dengan komponen, yaitu:

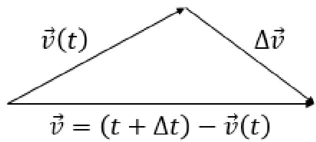
$$p_x x + p_y y + p_z z = p^2$$

Jika $\vec{p}$ adalah vektor normal bidang $\vec{N} = (a, b, c)$ maka persamaan bidang menjadi

$$ax + by + cz = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

4.2.2. Turunan Vektor

Sebuah vektor $\vec{v}$ merupakan suatu fungsi dari waktu $(\vec{v}(t))$. Bila t berubah dari t ke $t+\Delta$, maka $\vec{v}$ juga akan berubah dari $\vec{v}$ ke $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ seperti dilihat pada gambar 4.4.



Gambar 4.4. Perubahan vektor $\vec{v}$

Komponen $\Delta\vec{v}$ adalah $(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$ turunan $\vec{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} it \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

dan berhubungan dengan turunannya $d\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$

jika s suatu fungsi skalar, maka:

$$\Delta(s\vec{v}) = (s+\Delta s)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - s\vec{v}$$

$$= s\Delta\vec{v} + \vec{v}\Delta s + \Delta s\Delta\vec{v}$$

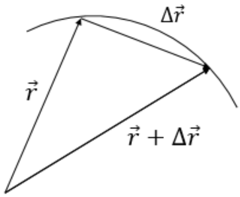
untuk $\Delta\vec{v}$ dan Δs menuju nol maka:

$$d(s\vec{v}) = sd\vec{v} + \vec{v}ds$$

untuk dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ akan didapat:

$$d(\vec{u}\vec{v}) = \vec{u}.d\vec{v} + \vec{v}.d\vec{u}$$

Andaikan suatu titik dengan vektor posisi $\vec{r}$ bergerak sepanjang kurva c (gb.4.5)



Gambar 4.5. Suatu titik bergeser pada suatu kurva

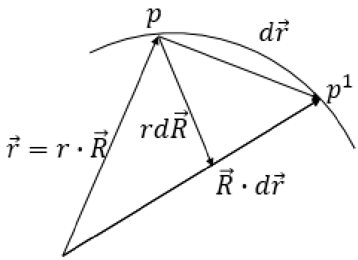
Kecepatan titik itu bergerak dapat diungkapkan dengan

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Andaikan $\vec{R}$ vektor satuan $\vec{r}$, maka $\vec{r} = r.\vec{R}$. Dapat ditulis:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{R}\frac{dr}{dt}$$

Suku $\vec{R}\dfrac{dr}{dt}$ adalah kecepatan radial titik dan $r\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ akan tegak lurus pada arah radial.



Gambar 4.6. komposisi $d\vec{r}$ dalam arah radial dan tangensial

Terlihat dari gambar bahwa $\frac{d\vec{R}}{dt}$ tegak lurus pada $\vec{R}$. Ini dapat dibuktikan dengan menggunakan vektor satuan $\vec{R}$.

$$\vec{R}.\vec{R} = 1$$

Jika kita diferensialkan akan dapat:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}.\vec{R}\right) = \vec{R}\frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}\vec{R} = 2\vec{R}\frac{d\vec{R}}{dt} = 0$$

atau $\vec{R}\frac{d\vec{R}}{dt} = 0$

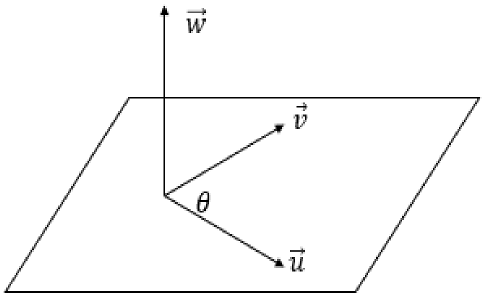
Ini membuktikan $\vec{R}$ tegak lurus $\frac{d\vec{R}}{dt}$

4.2.3. Perkalian Vektor atau Perkalian Silang

Perkalian vektor dari dua vektor akan menjadi suatu vektor lain yang tegak lurus pada kedua vektor tersebut dan didefinisikan sebagai:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

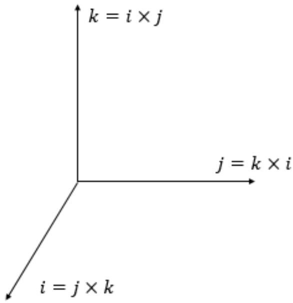
dengan θ sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dan vektor normal dari bidang $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.



Gambar 4.7. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

Jika kita gunakan vektor satuan maka kita dapatkan $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

Sedangkan $i \times j = k$, $j \times k = i$ dan , $k \times i = j$



Gambar 4.8. Perkalian vektor dari i, j, k

untuk vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ dan $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ maka akan didapatkan:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \times (v_x, v_y, v_z)$$

$$= i(u_y v_z - u_z v_y) + j(u_z v_x - u_x v_z) + k(u_x v_y - u_y v_x)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

untuk perkalian tiga vektor didapat $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\overline{w}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{w}.\vec{u})\vec{v}$.

4.2.4. Penggunaan Perkalian Vektor dalam Fisika

4.1.4.1. Momentum Sudut

Momen linier $\vec{p}$ suatu partikel diberikan dengan: $\vec{p} = m\vec{v}$ dimana m massa benda dan kecepatannya. Sedangkan momentum sudut $\vec{L}$ disekitar suatu titik asal adalah:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

atau $\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

dan kita dapatkan komponennya adalah:

$$L_x = yP_x - zP_y$$

$$L_y = zP_x - xP_z$$

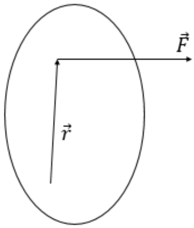
$$L_z = xP_y - yP_x$$

untuk sejumlah massa dalam suatu system patikel didapat momentum sudut total:

$$\vec{L} = \sum L_I$$

4.1.4.2. Momen Gaya

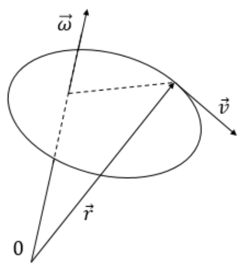
Jika suatu vektor gaya $\vec{F}$ bekerja pada sebuah benda dengan vektor posisi $\vec{r}$ maka pada benda aka nada torsi atau momen gaya $\vec{M}$ dengan $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.



Gambar 4.9. Torsi oleh gaya $\vec{F}$

4.1.4.3. Kecepatan Sudut

Kecepatan sudut $\vec{\omega}$ disekitar titik asal dinyatakan dengan $\bar{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Gambar 4.10. Kecepatan sudut $\vec{\omega}$

Contoh: Dapatkan hubungan $\vec{L}$ dengan $\vec{\omega}$ untuk partikel yang bergerak disekitar titik asal.

Penyelesaian:

Kita mengetahui bahwa $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ dan $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ dengan demikian:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= m(\vec{r}.\vec{r})\vec{\omega} - m(\vec{r}.\vec{\omega})\vec{r}$$

$$= mr^2\vec{\omega} - m(\vec{r}.\vec{\omega})\vec{r}$$

Jika kita gunakan vektor satuan $\vec{R} = \dfrac{r}{|\vec{r}|}$ maka didapat:

$$\vec{L} = [\vec{\omega} - (\vec{R}.\vec{\omega})\vec{R}]mr^2$$

Jika $\vec{\omega}$ arahnya tetap dan $\vec{r}$ tegak lurus $\vec{\omega}$ maka didapat: $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$

Ini merupakan kasus untuk gerak dalam bidang.

Contoh: Tunjukkan energy kinetik rotasi untuk partikel adalah:

$$1/2mr^2\omega^2 \sin^2(\vec{r}.\vec{\omega})$$

Penyelesaian: $Ek = 1/2mv^2$ sedangkan

$$v^2 = \vec{v}.\vec{v} = \vec{v}.(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= [(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}].\vec{r}$$

$$= [(\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{r} - (\vec{\omega} \times \vec{r})\vec{\omega}].\vec{r}$$

$$= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \times \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \omega^2 r^2 (1 - \cos^2(\vec{\omega}, \vec{r})$$

$$= \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Jadi $Ek = 1/2m\omega^2 r^2 \sin^2(\vec{\omega}, \vec{r})$

Untuk kasus $\vec{r}$ tegak lurus terhadap $\vec{\omega}$ didapat $E_k = 1/2mr^2\omega^2$

4.2. Operator Vektor

4.2.1. Gradien

Misalkan f(x,y,z) suatu fungsi dalam tiga dimensi , perubahan f(x,y,z) dari titik (x,y,z) ke titik $(x+dx, y+dy, z+dz)$ adalah:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k.(idx + jdy + kdz)$$

$$= \nabla f.d\vec{r}$$

dimana $d\bar{r} = (dx, dy, dz)$ dan $\nabla(del)$ adalah operator vektor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Persamaan ∇f disebut gradien f yang kadang-kadang disebut dengan gradien f.

grad $f = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ merupakan medan vektor.

Jika f(x,y,z) =C suatu permukaan, maka untuk pergeseran $d\vec{r}$ pada permukaan itu adalah: $\nabla f . d\vec{r} = 0$

Karena $d\vec{r}$ sejajar permukaan, vektor ∇f merupakan vektor yang tegak lurus pada permukaan tersebut.

Dalam berbagai hal, gaya sering ditulis sebagai gradien dari energy potensial.

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Dalam hal ini $\vec{F}$ merupakan gaya konservatif dimana usaha dilakukan oleh gaya ini tidak bergantung pada lintasan.

$$W(usaha) = -\int_{\eta}^{\eta} \vec{F}.d\vec{r}$$

$$= \int_{\eta}^{\eta} \nabla U.d\vec{r}$$

$$= \int_{\eta}^{\eta} .dU = U(r_2) - U(r_1)$$

4.2.2. Divergensi

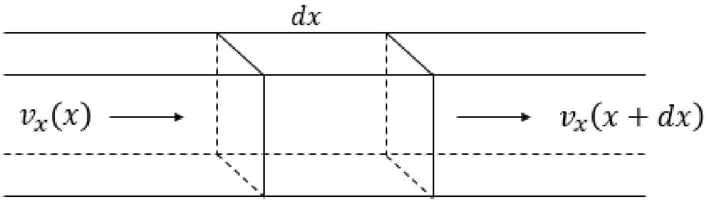
Divergensi dari suatu medan vektor $\vec{U}$ (div U) didefinisikan sebagai perkalian titik:

$$\nabla \vec{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \left(U_x, U_y, U_z \right)$$

$$= \frac{\partial U_x}{\partial x}, \frac{\partial U_y}{\partial y}, \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Divergensi dapat diartikan sebagai berikut:

Misalkan suatu fluida mengalir dalam x,



Gambar 4.11. Aliran fluida dalam x

Maka massa fluida yang mengalir pada ρv_x dimana ρ rapat massa fluida dan v_x kecepatan linier fluida. Massa fluida yang masuk ke dalam elemen volume dengan ketebalan dx tiap satuan waktu satu satuan luas pada x adalah $\rho(x)v_x(x)$ dan yang keluar adalah $\rho(x+dx)v_x(x+dx)$. Sedangkan fluida yang hilang dalam elemen volum persatuan waktu dan volume adalah:

$$-\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\rho(x+dx)v_x(x+dx) - \rho(x)v_x(x)}{dx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)$$

Bila fluida mengalir tidak hanya dalam arah x melainkan dalam arah x,y,z maka kehilangan massa kehilangan massa tiap satuan volume adalah:

$$-\frac{\partial\rho}{\partial_t}=\frac{\partial}{\partial_x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial_y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial_z}(\rho v_z)$$

$$=\nabla.(\rho\vec{v})$$

Dengan demikian $\nabla.(\rho\vec{v})$ merupakan laju kehilangan massa tiap satu volume melalui satu volume.

4.2.2. Rotasi

Rotasi medan vektor $\vec{U}$ didefinisikan sebagai:

$$\nabla\times\vec{U}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial_x & \partial/\partial_y & \partial/\partial_z \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

Pada fluida yang mengalir, jika rotasi kecepatan $(\nabla x\vec{v})$ tidak nol, maka pada fluida aka nada pusaran. hal ini disebut medan vektor $\vec{v}$ rotasional. Sebaliknya jika $(\nabla x\vec{v})\nabla x\vec{v}=0$, $\vec{v}$ disebut medan rotasional.

Rotasi dari suatu gradien dapat dibuktikan bahwa: $\nabla\times\nabla f=0$ yang berarti ∇f adalah medan rotasional.

Contoh: Buktikan persamaan difusi $\frac{\partial c}{\partial t}=D\nabla^2 c$ dimana c adalah konsentrasi dan D konstanta difusi.

Penyelesaian:

Dalam cairan atau zat padat isotropik difusi terjadi tegak lurus pada permukaan , $c(x, y, z)$=konstanta dan dalam arah dari pengurangan konsentrasi.

Dari hukum fisika didapat: $c\vec{v} = -D\nabla c$

dengan $\vec{v}$ kecepatan linier difusi. Maka rapat massa yang hilang tiap satuan volume adalah: $\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla.(-D\nabla c)$. Jika D tetap maka

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla.\nabla c = D\nabla^2 c$$

Contoh: buktikan untuk fluida tak kompresibel $\nabla.\vec{v} = 0$

Penyelesaian:

jika fluida tak kompresibel dimana massanya tidak berubah akibat tekanan, berarti ρ tetap.

Dari persamaan untuk divergensi didapat: $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla.\rho\vec{v}$

Karena ρ tetap, maka $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ atau $\nabla.\rho\vec{v} = \rho\nabla.\vec{v} = 0$ dan $\nabla.\vec{v} = 0$ (terbukti).

4.3. Diadik

Pada bagian ini akan dibahas mengenai operasi suatu vektor memberikan suatu vektor lain. Perkalian vektor disini membutuhkan suatu operasi tertentu. Didalam pembahasan medium yang tidak isotropik seperti dalam listrik, zat padat, mekanika kita sering menggunakan gaya yang menyebabkan pergeseran yang terjadi tidak sejajar dengan gaya yang diberikan. Secara matematik hal ini diuraikan dalam tensor, seperti tensor tegangan. Tensor memiliki orde yang berbeda-beda. Skalar merupakan tensor orde nol, vektor adalah tensor orde satu dan diadik tensor orde dua.

Misalkan dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, kita dapat menuliskan perkalian antara $\vec{a}\vec{b}$. Perkalian ini kita sebut dengan diad dan jumlah dua atau lebih dari diad disebut dengan diadik. Untuk perkalian ini kita menggunakan sifat

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{v}.\vec{a})\vec{b}$$

$$\vec{a}\vec{b}.\vec{v} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{v})$$

Dimana $\vec{b}.\vec{v}$ dan $\vec{v}.\vec{a}$ adalah perkalian skalar. Harus diperhatikan bahwa $\vec{a}\vec{b} \neq \vec{b}\vec{a}$.

diad dari $\vec{a}\vec{b}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\vec{a}\vec{b} = (ia_x + ja_y + ka_z)(ib_x + jb_y + kb_z)$$

$$= iia_x b_x + ija_x b_y + ika_x b_z + jia_x b_x + jja_y b_y + jka_y b_z +$$

$$kia_z b_x + kja_z b_y + kka_z b_z$$

dengan menggunakan bentuk diatas dapat kita cari:

$$(\vec{v}.\vec{a})\vec{b} = v_x ia_x b_x + v_x ja_x b_y + v_x ka_x b_z + v_y ia_y b_x + v_y ja_y b_y + v_y ka_y b_z$$

$$v_z ia_z b_x + v_z ja_z b_y + v_z ka_z b_z$$

dari apa yang dibahas diatas dapat kita tuliskan suatu diadik:

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots$$

dapat dikumpulkan dengan bentuk:

$$D = iiD_{xx} + ijD_{xy} + ikD_{xz} + jiD_{yx} + jjD_{yy} + jkD_{yz} +$$

$$kiD_{zx} + kjD_{zy} + kkD_{zz}$$

dimana $D_{xx} = a_{1x} b_{1x} + a_{2x} b_{2x} + \dots$

$$D_{xy} = a_{1y} b_{1y} + a_{2y} b_{2y} + \dots$$

diadik dapat dinyatakan dengan menggunakan matriks dengan 9 komponen.

$$\dots D = \dots \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yz} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}$$

4.3.1. Perkalian Vektor

Kita ingin menentukan diadik A dan B yang berhubungan dengan perkalian silang berikut ini:

$$\overline{w} = \vec{u} \times \vec{v} = A.\vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}B = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Kita dapat menuliskan $\vec{u} \times \vec{v}, A\vec{v}, \vec{u}.B$ dan bandingkan komponen-komponennya, sehingga didapat:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas terlihat bahwa A dan B adalah matriks antisimetri.

4.3.2. Gradien dari Medan Vektor

Misalkan $\vec{u}(r)$ suatu fungsi dari posisi dalam bidang dengan

$$\vec{u}(r) = \lfloor u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z) \rfloor$$

$$\vec{u}(r) = [u_x(r), u_y(r), u_z(r)]$$

Perubahan $\vec{u}$ dapat dinyatakan dengan

$$d\vec{u} = [du_x, du_y, du_z(r)]$$

dimana $d\vec{u}_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} dy + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} dz = \nabla u_x.dx$

$$d\vec{u}_y = \nabla u_y.dy$$

$$d\vec{u}_z = \nabla u_z.dz$$

berarti $d\vec{u} = (\nabla u_x.dx)i + (\nabla u_y.dy)j + (\nabla u_z.dz)k$

$$= dr.\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} i + \frac{\partial u_x}{\partial y} j + \frac{\partial u_x}{\partial z} k\right) i + \ldots$$

$$d\vec{u} = dr \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} ii + \frac{\partial u_y}{\partial x} ij + \frac{\partial u_z}{\partial x} ik + \frac{\partial u_x}{\partial y} ji + \frac{\partial u_y}{\partial y} jj + \frac{\partial u_z}{\partial y} jk + \frac{\partial u_x}{\partial z} ki + \frac{\partial u_y}{\partial z} kj + \frac{\partial u_z}{\partial z} kk\right)$$

atau $d = dr.\nabla\vec{u}$

dimana diadik dapat digambarkan dengan matriks

$$\nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Kuantitas $\nabla\vec{u}$ disebut dengan gradient medan vektor $\vec{u}$.

4.3.4. Tensor Momen Inertia

Tensor momen inertia dapat ditulis dalam bentuk:

$$L = mr^2\Omega - m(r.\Omega)r$$

Momentum total untuk system dengan kecepatan sudut partikel yang sama adalah:

$$L = \sum L_1 = \sum m_I \left(r_i^{\,2}\Omega - r_I \Omega r_I\right)$$

atau dapat ditulis dengan:

$$L = \sum m_I \left(r_I^{\,2} I - r_I r_I\right)\Omega$$

$$L = \Phi\Omega$$

I merupakan satuan diadik dimana $I = ii + jj + kk$

Φ disebut dengan momen inertia diadik dan dapat ditulis dengan:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sum m_i\left(y_i^{\,2} + z_i^{\,2}\right) & -\sum m_i y_i x_i & -\sum m_i y_i x_i \\ \sum m_i y_i x_i & \sum m_i\left(x_i^{\,2} + z_i^{\,2}\right) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i\left(x_i^{\,2} + y_i^{\,2}\right) \end{bmatrix}$$

4.4. Suplemen: Penyelesaian Vektor menggunakan Matlab

Diketahui Vektor u = (2, -1, 1) dan v = (1, 1, 2). Tentukan **u.v** dan sudut θ antara **u** dan **v** !

Dengan menggunakan program MATLAB:

```
>> A=[2 -1 1];

>> B=[1 1 2];

>> C=dot(A,B)

C =

     3

>> CosTheta = dot(A,B)/(norm(A)*norm(B))

CosTheta =

     0.5000

>> ThetaInDegrees = acos(CosTheta)*180/pi

ThetaInDegrees =

   60.0000
```

Tentukan perkalian silang antara *u* dan *v* biladiketahui *u* =

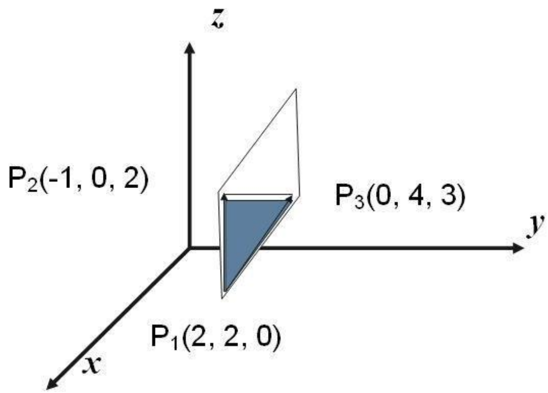
(1, 2, -2) dan *v* = (3, 0, 1).

Dengan menggunakan MATLAB:

```
>> u = [1 2 -2];

>> v = [3 0 1];

>> c = cross(u,v)

c =

      2     -7    -6
```

Tentukan luas segitiga yang dibatasi titik $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ dan $P_3(0, 4, 3)$.

Solusi: Menentukan titik-titik P_1, P_2 dan P_3, lalu menghubungkan antar titik.



Gambar 4.12 Menentukan luas segitiga

Luas segitiga adalah ½ luas jajaran genjang, maka kita tentukan terlebih dahulu:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2{,}2)$ $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2{,}2{,}3)$

Lalu ditentukan

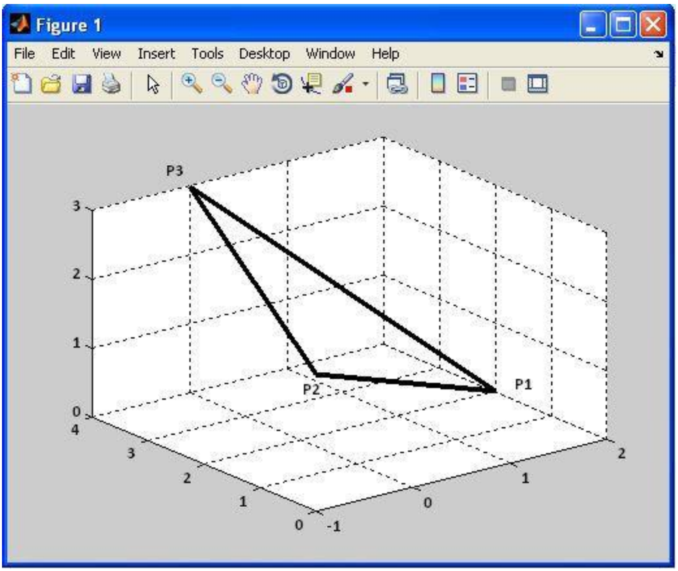
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10{,}5, -10)$$

Maka A =1/2 x $\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = {}^{1}/_{2}\,(15) = \frac{15}{2}$

Dengan menggunakan MATLAB:

```
 >> axis([-1 2 0 4 0 3]);

 >> line([2 -1],[2 0],[0 2]);


 >> grid on

 >> line([2 0],[2 4],[0 3]);

>> line([-1 0],[0 4],[2 3]);

>> p1=[2 2 0];

>> p2=[-1 0 2];

 >> p3=[0 4 3];

>> c=p3-p1c =

c =

      -2    2     3
```

```
>> d=cross(b,c)d =

   -10      5   -10

>> luasstg= 0.5*norm(d)luasstg =

    7.5000
```



Gambar 4.13 Plot Segitiga Menggunakan MATLAB

4.5. Latihan

1. Carilah sudut antara bidang

   $5x - 3y - z = 0$

   $4x - y + 2z + 1 = 0$

2. Jika $F = xyi + 3$ carilah usaha yang dilakukan yang berjarak dari titik asal (2,20) dengan lintasan

   a. $Y = 5x^2$

   b. Garis lurus

   c. Mengapa a dan b berbeda

3. Nyatakan ∇x dalam bentuk matriks.

4. Buktikan untuk semua titik yang bergerak pada rotasi benda tegar laju kecepatan sudutnya $\frac{d\phi}{dt}$ sama dengan kecepatan sudut Ω

   $$\Omega = \frac{d\phi}{dt}\vec{u} \quad \vec{u} = \text{vektor satuan sepanjang sumbu rotasi}$$

5. Untuk rotasi benda tegar tunjukkan energy kinetiknya.

   $$T = \frac{1}{2}\Omega.\phi\Omega$$

$$= \frac{1}{2} I \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2$$

$\Omega =$ kecepatan sudut

$\phi =$ tensor momen inersia

$I =$ skalar (momen inersia pada sumbu rotasi)

$I = \vec{u}\phi\vec{u}$

Dengan $\vec{u}$ vektor satuan sumbu rotasi dan $\frac{d\phi}{dt}$ laju kecepatan sudut.

BAB V

RUANG VEKTOR

Deskripsi Singkat

Secara geometri kita dapat menginterprestasikan Penyelesaian SPL sebagai titik koordinat dalam ruang. Dari operasi penjumlahan dapat ditulis sebagai penjumlahan dua vektor. Penyelesaian dimana kombinasi linier dari dua Penyelesaiannya. Hal ini membawa kita kepada suatu ruang vektor.

Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan dapat mengerti tentang syarat suatu ruang sebagai ruang vektor, sifat-sifat vektor dalam ruang vektor, mencari materi vekktor basis dalam suatu ruang vektor, serta dapat membuktikan basis-basis dalam suatu ruang merupakan basis orthogonal atau ortonormal.

5.1. Definisi Ruang Vektor

Definisi: suatu himpunan V dengan elemen vektor dikatakan membentuk suatu ruang vektor jika memenuhi kondisi:

5.1.1. Penjumlahan

Aturan ini mengatakan bahwa tiap vektor $\underset{u}{\rightarrow}$ dan $\underset{v}{\rightarrow}$ pada V dan $\underset{u}{\rightarrow} + \underset{v}{\rightarrow}$ juga pada V. Operasi ini memenuhi aksioma:

i. Untuk semua $\underset{u}{\rightarrow}, \underset{v}{\rightarrow}, dan \underset{\omega}{\rightarrow} di\ V$

$\underset{u}{\rightarrow} + \underset{v}{\rightarrow} = \underset{v}{\rightarrow} + \underset{u}{\rightarrow}$ (hukum komutatif)

$\left(\underset{u}{\rightarrow} + \underset{v}{\rightarrow}\right) + \underset{\omega}{\rightarrow} = \underset{u}{\rightarrow}(\underset{v}{\rightarrow} + \underset{\omega}{\rightarrow})$ (hukum asosiatif)

ii. Ada vektor nol di V yang di nyatakan dengan $\vec{0}$ sehingga

$\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$ untuk setiap $\vec{u}$ di V

iii. Untuk tiap $\vec{u}$ di V ada vektor -$\vec{u}$ sehingga

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$,-$\vec{u}$ disebut invers penjumlahan dari $\vec{u}$

5.1.2. Perkalian Skalar

Untuk setiap vektor dalam V dan skalar s aksioma:

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

$$(st)\vec{u} = s(t\vec{u})$$

$$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$(s + t)\vec{u} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

Perhatian:

Jika skalar s adalah bilangan riil, maka ruang tersebut dinamakan ruang vektor riil. Sedangkan jika s bilangan kompleks, maka disebut ruang vektor kompleks.

Ruang Vektor:

1. Himpunan semua bilangan riil dengan operasi penjumlahan perkalian adalah ruang vektor rill.
2. Himpunan bilangan kompleks
3. Himpunan semua matriks m x n dengan elemen riil

Contoh:

Buktikan bahwa matriks 2×2 dengan elemen riil dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan bilangan riil membentuk dua vektor.

Penyelesaian:

Jika A dan B pada V matriks 2 × 2 , maka A+B dan CA untuk semua bilangan riil C berada di V. Jika kita periksa, akan memenuhi aksioma yang dikemukakan:

i. Memenuhi hukum komutatif dan asosiatif

ii. Jika A suatu vekto r pada V dan $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

maka $A + O_2 = A, O_2$ vektor nol pada V

iii. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ sehingga

$$A + (-A) - O_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2. Ruang Vektor

Definisi: misalkan $\vec{R}^n$ menyatakan himpunan dengan n tripel terorde dan suatu bilangan rill sehingga $\vec{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) : x_i \in R\}$ kita katakan elemen di R^n sebagai vektor dalam $\vec{R}^n$.

Kita sering menggunakan $\vec{R}^2$ dan $\vec{R}^3$ pada geometri koordinat yang kita nyatakan sebagai pasangan, tripel dan bilangan sebagai titik koordinat dalam bidang dan ruang tiga dimensi.

Contoh: berikan contoh-contoh vektor dalam R^3, R^5, R^8

Penyelesaian: (1,2,4),(5,7,6) vektor pada $\vec{R}^3$

(2,0,0,0,5), (π,3,2,1,0) vektor pada $\vec{R}^5$

(1,0,1,0,4,5,1,8), (1,1,1,1,1,1,1,1) vektor pada $\vec{R}^8$

Definisi: misalkan $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ adalah vektor pada $\vec{R}^n$ dan k suatu bilangan riil, kita definisikan penjumlahan dan perkalian skalar pada R^n adalah**:**

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) - (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$k\vec{x} = k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

Contoh: jika x=(1,-1,0,2), y=(0,-1,4,3), dapatkan $x + y$ dan $2x + 3y$

Penyelesaian: $x + y$ -(1,1,0,2)+ (0,1,4,3) – (1,1,4,7)

$$2x + 3y = (2,-2,0,4) + (0,-3,12,9) = (2,-5,12,13)$$

Contoh: misalkan $\vec{u} = (1-3i, 2+4i)$, $\vec{v} = (-2+4i, 5-6i)$, $k = 2+i$ vektor kompleks c^n, dapatkan $\vec{u} + k\vec{v}$

Penyelesaian:

$$\vec{u} + k\vec{v} = (1-3i, 2+4i) + (2+i)(-2+4i, 5-6i)$$
$$= (1-3i, 2+4i) + (-8+6i, 16-7i$$
$$= (7+3i, 18-7i)$$

5.3. Sub Ruang

Suatu ruang vektor s dikatakan sebagai sub ruang dari vektor vektor ruang V jika s memenuhi kondisi penjumlahan dan perkalian skalar seperti pada V.

Contoh: Jika V=M_2(R) adalah matriks 2×2 dengan elemen rill dan s adalah himpunan bagian dari V dengan elemen diagonal utama nol, tunjukkan bahwa s adalah sub bab ruang V.

Penyelesaian:

Misalkan A dan B pada s dimana $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}$ dimana a,b,c,d bilangan riil, maka:

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c\\ d & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a+c\\ b+d & 0\end{bmatrix}$$

yang berarti A+B ada pada s sehingga s memenuhi kondisi penjumlahan.

Selanjutnya untuk sembarang konstanta k riil didapat:

$$kA=k\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & ka\\ kb & 0\end{bmatrix}$$

yang juga vektor pada s dan memenuhi kondisi perkalian skalar. Dengan demikian s adalah sub ruang V.

5.4. Kombinasi Linier dan Merentang

Jika himpunan vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah ruang vektor V, maka hanya ada satu cara untuk mendapatkan vektor baru dari himpunan vektor tersebut. Cara ini adalah dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada V.

Definisi: suatu vektor $\vec{v}$ dalam ruang vektor V dikatakan kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ pada V jika skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tidak nol sehingga:

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{v}_i$$

Contoh: vektor $\vec{v} = (3,5)$ pada R^2 dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor $\vec{v}_1 - (1,0)\vec{v}_2 - (0,1)$, dari sini dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (3,5) = (3,0) + (0,5) \\ &= 3(1,0) + 5(0,1) \\ &= 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Definisi: suatu vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ pada V dikatakan merentang jika setiap vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$

Contoh: Jika $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ dan $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ dan $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ pada $\vec{R}^3$, buktikanlah bahwa $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ merentang pada $\vec{R}^3$

Penyelesaian: misalkan $\vec{x} = (a,b,c)$ pada $\vec{R}^3$. Dapat kita tunjukkan bahwa:

$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ dimana tidak semua $c_I = 0$

$\vec{x} = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1)$

$(a,b,c) = (c_1, c_2, c_3)$ sehingga $c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c$ yang berarti $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ merentang pada $\vec{R}^3$.

Contoh: buktikan $\vec{R}^2$ direntang oleh $\vec{v}_1 = (1,1), \vec{v}_2 = (1,-1)$

Penyelesaian: misalkan $\vec{x} = (x_1, x_2)$ sembarang vektor pada $\vec{R}^2$. Kita akan tunjukkan bahwa ada konstanta c_1 dan c_2 sehingga:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 - (x_1, x_{2)})$

$c_1(1,1) + c_2(1,-1) = (x_1, x_2)$

dan didapat $c_1 + c_2 = x_1$ dan $c_1 - c_2 = x_2$

Determinan matriks koefisien didapat: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

Dan kita dapatkan: $c_1 = 1/2(x_1 + x_2)$ dan $c_2 = 1/2(x_1 - x_2)$

Berarti $x = (x_1, x_2) = 1/2(x_1 + x_2)\vec{v}_1 + 1/2(x_1 - x_2)\vec{v}_2$

5.5. Bebas dan Tak Bebas Linier

Salah satu masalah dasar dari aljabar linier adalah menentukan apakah himpunan vektor $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ tidak bebas linier yang berarti paling sedikit satu vektor pada ruang vektor tersebut dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari himpunan vektor tersebut secara matematik dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi: suatu himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ pada V dapat dikatakan tidak bebas linier jika tidak semua skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nol sehingga:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = 0$$

Jika $c_1 = c_2 = \ldots = c_k$, maka himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah himpunan vektor bebas linier.

Contoh: a. $\vec{v}_1 = (1,3,1), \vec{v}_2 = (1,-1,3)$, dan $\vec{v}_3 = (1,7,-1)$ adalah tidak bebas linier karena $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0$

b. Vektor (1,0,0),(0,1,0),dan (0,0,1) adalah vektor bebas linier karena $c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$ sehingga $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

c. $f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos^2 x$, dan $f_3(x) = 1$ pada $C^2(I)$ adalah titik bebas linier karena $f_1 + f_2 + f_3 = 0$

Contoh: tentukan apakah A,B dan C bebas linier jika**:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B == \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{dan} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pada $M_2(R)$

Penyelesaian: dari definisi kita tuliskan $c_1A + c_2B + c_3C = 0$

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini akan terpenuhi jika. $c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

$$-c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$2c_1 + 2c_3 = 0$$

$$3c_2 + c_3 = 0$$

Dengan operasi baris kita dapatkan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Yang berarti $c_1 - c_2 - c_3 = 0$ sehingga A,B, dan C adalah bebas linier.

Dengan beberapa contoh diatas jelas untuk melihat apakah himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ bebas linier atau tidak, kita harus membuat persamaan

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_nV_n = 0$$

Kemudian kita periksa apakah persamaan tersebut memiliki Penyelesaian trivial ?

Jika diberikan sejumlah n vektor dalam R^m, maka kita dapat menentukan secara langsung apakah vektor-vektor tersebut bebas linier atau tidak.

Misalkan $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ vektor pada R^m dan $D = \{V_{1,}, V_2, \ldots, V_n\}$ dimana D adalah matiks kolom dari $V_{1,}, V_2, \ldots, V_n$

Jika $n > m$, vektor tersebut tidak bebas linier.

Jika $m = n$, vektor tidak bebas linier jika dan hanya jika ran $(D) = 0$.

Jika $n < m$, vektor tidak bebas linier jika dan hanya berikut $(D) < n$.

Contoh: Tentukan himpunan vektor berikut bebas linier atau tidak.

a. $\vec{V}_1 = (1,0,0), \vec{V}_2 = (0,2,3), \vec{V}_3 = (4,5,6), \vec{V}_4 = (1,-2,2)$

b. $\vec{V}_1 = (1,-1,2,3), \vec{V}_2 = (1,1,0,1), \vec{V}_3 = (1,,5,-4,-3)$

c. $\vec{V}_1 = (1,0,1,0), \vec{V}_2 = (1,1,0,0), \vec{V}_3 = (1,0,0,1), \vec{V}_4 = (1,-1,2,1)$

Penyelesaian: a. Vektor-vektornya tidak bebas linier karena n>m

b. Dalam hal ini kita harus menentukan rank dari matriks

$$D = [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Dengan reduksi baris akan kita dapatkan

Yang berarti rank (D)=2, rank (D)<n sehingga vektor-vektor tidak bebas linier.

c. Untuk kasus n=m, kita hitung det(D) dari matriks

$$\det(D) = \det[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Berarti det(D)≠0. Dengan demikian vektor-vektor bebas linier.

5.6. Bebas Linier untuk Fungsi

Jika membahas persamaan diferensial kita akan menghasilkan beberapa fungsi yang bebas linier untuk beberapa interval. Untuk hal ini kita akan melihat bagaimana cara untuk menentukan kriteria itu.

Definisi: fungsi –fungsi $f_1, f_2,..., f_n$ bebas linier pada interval I jika dan hanya jika $C_1 f_1 + C_2 f_2 + ... + C_n f_n - 0$
Memiliki Penyelesaian untuk C_t trivial $(C_t = 0)$

Contoh: $f_1(x) = \sin x$ dan $f_2(x) = \cos x$ akan bebas linier pada interval (~,-~) karena $C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$ dan turunnya $C_1 \cos x - C_2 \sin x = 0$
Determinan dari matriks koefisiennya adalah**:**

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

Dengan menggunakan aturan cramer untuk Penyelesaian sistem persamaan linier homogen jika det(A)≠0 maka Penyelesaiannya trivial. Berarti $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ bebas linier. Metode yang digunakan di atas dapat dibuat suatu determinan untuk fungsi-fungsi tersebut.

Definisi: untuk $f_1, f_2, ..., f_n$ akan bebas linier pada suatu interval jika $W = [f_1, f_2, ..., f_n]$ tidak sama dengan nol dimana**:**

$$W[f_1, f_2, ..., f_n] = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & ... & f_n(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & ... & f_n^{'} \\ : & : & ... & : \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1} & ... & f_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

Tetapi jika $W\left[f_1, f_2, ..., f_n\right] = 0$ kita tidak dapat langsung mengatakan $f_1, f_2, ..., f_n$ tidak bebas linier.

Contoh: tentukan fungsi-fungsi berikut apakah bebas linier pada interval (-~,~)

a) $f_1(x) = e^x, f_2(x) = x^2 e^x$

b) $f_1(x) = x, f_2(x) = x + x^2, f_3(x) = 2x - x^2$

c) $f_1(x) = x^2, \sim < x < \sim)$

Penyelesaian: a.

$$W[f_1, f_2] = \begin{bmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & e^x(x^2 + 2x \end{bmatrix} = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & x^2 + 2x \end{bmatrix} = 2xe^{2x}$$

maka f_1, f_2 bebas linier karena $W \neq 0$

b. $W[f_1, f_2, f_3] = \begin{vmatrix} x & x+x^2 & 2x-x^2 \\ 1 & 1+2x & 2-2x \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Berarti tidak ada kesimpulan.

Untuk kita kembali ke pengertian dasar dari bebas linier, dari fungsi di atas kita buat persamaan:

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = 0$$

didapat: $C_1 x + C_2(x + x^2) + C_3(2x - x^2) = 0$

atau $(C_1 + C_2 + 2C_3)x + (C_2 + C_3)x^2 - 0$

Karena x dan x^2 adalah fungsi bebas linier $[W(x, x^2) = x^2]$ maka koefisiennya harus memenuhi persamaan

$$C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$$

$$C_2 + C_3 = 0$$

yang memiliki Penyelesaian tak terhingga dan Penyelesaiannya dapat ditulis adalah:

$$C_2 = C_3 \quad C_1 = -3C_2$$

Jadi $-3C_2 f_1 + C_2 f_2 + C_2 f_3 = 0$

atau $-3f_1 + f_2 + f_3 - 0$

Dengan demikian f_1, f_2, f_3 tidak bebas linier.

5.7. Basis dan Dimensi

Dari barisan terdahulu kita dapat menuliskan suatu vektor dalam ruang V sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain. Vektor pembentuk vektor baru sebagai kombinasi linier dari vektor yang diketahui kita kenal dengan "basis".

Definisi: suatu himpunan vektor $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, ..., \vec{V}_n\}$ pada ruang vektor V dikatakan basis jika:

1) Vektor-vektor tersebut bebas linier
2) Vektor-vektor tersebut merentang pada V.

Pada contoh sebelumnya kita melihat bahwa vektor (1,0,0),(0,1,0) dan (0,0,1) adalah vektor yang bebas linier dan merentang pada R^3. Hal ini dikatakan vektor-vektor merupakan basis pada R^3.

Banyaknya vektor basis pada rung vektor V disebut dengan "Dimensi". Jadi pada contoh diatas dikatakan memiliki 3 dimensi.

Contoh: tunjukkan bahwa $\vec{V}_1 = (1,-1,1), \vec{V}_2 = (2,1,3)$ dan $\vec{V}_3 = (3,1,-2)$ basis dari R^3

Penyelesaian: kita periksa $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, melalui $\det[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3]$.

$$\det[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -19$$

Berarti $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ bebas linier sekaligus sekaligus ini membuktikan dia merentang pada R^3 karena $\vec{A}$ suatu vektor pada R^3 dapat kita tuliskan:

$$\vec{A} = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

dengan Penyelesaian tunggal karena $\det[\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3] \neq 0$ (ingat aturan cramer).

Contoh: $P_3 = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dengan a_t Riil. Dapat dituliskan bahwa setiap vektor pada P_3 sebagai kombinasi linier dari $1, x, x^2$, sedangkan:

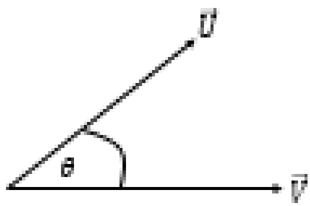
$$W[\vec{V}_0,\vec{V}_1,\vec{V}_2]=W[P_0,P_1,P_2]=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

Dengan demikian P_0, P_1, P_2 bebas linier sehingga P_0, P_1, P_2 basis pada P_3

5.8. Ruang Hasil Perkalian Dalam

Pada bagian terdahulu kita telah membahas perkalian skalar antara dua vektor yang dinyatakan dengan:

$$\vec{U}.\vec{V}=|\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta$$



Gambar 5.2. Geometri vektor $\vec{U}$ dan $\vec{V}$

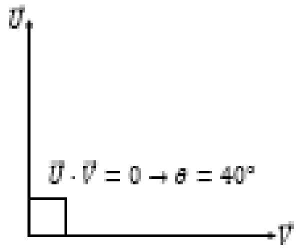
dapat juga ditulis:

$$\vec{U}.\vec{V}=U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3$$

sehingga besar vektor $\vec{U}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\left|\vec{U}\right|^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2 = \vec{U}.\vec{U}$$

Jika hasil perkalian skalar dari dua vektor yang tidak nol, berarti kedua vektor saling tegak lurus.



Gambar 5.3. perkalian skalar $\vec{U} \cdot \vec{V}$ yang saling tegak lurus

Untuk ruang vektor V kita perkenalkan istilah perkalian dalam (Inner Product).

Definisi: jika $\vec{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ dan $\vec{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ vektor pada R^n maka perkalian dalamnya adalah**:**

$$\left\langle \vec{U}.\vec{V} \right\rangle = U_1V_1 + U_2V_2 + \ldots + U_nV_n$$

$$= \sum_{i=1}^{\sim} U_i V_i$$

dengan besar vektor $\left|\vec{U}\right|^2 = \left\langle \vec{U}.\vec{U} \right\rangle$

Contoh:carilah sudut antara $\vec{U}$ dan $\vec{V}$ dimana $\vec{U} = (3,2,1,0)$ $\vec{V} = (1,2,0,0)$

Penyelesaian:

$$\langle \vec{U}.\vec{V} \rangle = (3,2,1,0).(1,2,0,0) = 3.1 + 2.2 + 0 + 0 = 7$$

$$|\vec{U}| = \sqrt{\langle \vec{U}.\vec{U} \rangle} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\langle \vec{V}.\vec{V} \rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{U}.\vec{U} \rangle}{|U||V|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{5}}$$

5.1.1. Ruang Hasil Kali dalam Rill

Untuk Y,Z pada V dan C skalar riil

1. $\langle \overline{X}.\overline{X} \rangle \geq 0$ dan $\langle \overline{X}.\overline{X} \rangle = 0$ jika $\overline{X} = 0$
2. $\langle Y.X \rangle = \langle X, Y \rangle$
3. $\langle C\overline{Y}, \overline{X} \rangle = C\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle$
4. $< X + Y, Z >=< X, Z >=< Y, Z >$
5. $|X| = \sqrt{\langle X.X \rangle}$

Ruang vektor riil bersama-sama dengan perkalian dalam membentuk ruang vektor hasil perkalian dalam rill.

Untuk fungsi-fungsi pada rag $C^0[a,b]$ dapat dinyatakan perkalian dalamnya sebagai**:**

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

dan $|f|^2 = \langle f, f\rangle$

$$= \int_a^b f^2(x)dx$$

Contoh: Jika f(x)=x, g(x)=3x-1 pada $C^0|0,1|$ dapatkan $|f|$ dan $\langle f,g\rangle$

Penyelesaian: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$$= \int_0^1 x(3x-1)dx = \int_0^1 (3x^2-1)dx$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|f|^2 = \int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 x.xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Jadi $|f| = \sqrt{\frac{1}{2}}$

5.1.2. Hasil Perkalian dalam Kompleks

Jika memilih vektor-vektor kompleks pada ruang C^n maka perkalian dalamnya menggunakan konjigate tersebut.

Misalkan $\overline{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\overline{V} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vektor-vektor pada C^n maka perkalian dalamnya adalah:

$$\langle \overline{U}, \overline{V} \rangle = u_1\vec{v}_1 + u_2\vec{v}_2 + ... + u_n\vec{v}_n$$

$$= \sum u, \bar{v}$$

dan besar vektornya ditentukan dengan

$$|U| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + ... + |u_n|^2}$$

Contoh: $U = (1+2i, 2-3i), V = (2-i, 3+4i)$

Penyelesaian: $\langle \overline{U}, \overline{V} \rangle = (1+2i)(2+i) + (2-3i)(3-4i)$

$$= 5i - 6 - 17i = -6(1+2i)$$

$$|U| = \sqrt{(1+2i)(1-2i) + (2-3i)(2+3i)}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Dari ruang hasil kali dalam dapat kita tentukan beberapa sifat orthogonal dari vektor pada $\overline{V}$:

1. Jika $\overline{U}$ dan $\overline{V}$ pada V maka jika $\left\langle \overline{U}, \overline{V} \right\rangle = 0$ dikatakan $\overline{U}$ dan $\overline{V}$ ortogonal.
2. Jika pada V ada himpunan vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang tidak nol maka:
   Jika $\left\langle \overline{U}_i, \overline{U}_j \right\rangle = 0$ untuk $i \neq j$ dikatakan V dibentuk oleh himpunan vektor ortogonal.
3. Jika $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ himpunan vektor ortogonal pada V dan $\left\langle \overline{u}_i, \overline{u}_j \right\rangle = 1$, dikatakan V dibentuk oleh vektor-vektor ortogonal.

Vektor $\vec{v}_1 = (-2,1,3,0), \vec{v}_2 = (0,-3,1,-6)$ dan $\vec{v}_3 = (-2,-4,0,2)$ membentuk himpunan vektor ortogonal karena $\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \right\rangle = \left\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\rangle = 0$

Himpunan vektor ortogonalnya dapat ditulis dengan:

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \vec{v}_1, \frac{1}{\sqrt{46}} \vec{v}_2, \frac{1}{2\sqrt{6}} \vec{v}_3 \right\}$ dimana $\sqrt{14}, \sqrt{46}, 2\sqrt{6}$ adalah besar $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Contoh: carilah himpunan vektor ortogonal untuk vektor-vektor berikut:

a. $\vec{v}_1 = (1+i, i), \vec{v}_2 = (2+i, 1-i)$

b. $\vec{v}_1 = (3-i, i), \vec{v}_2 = (1-i, -2-4i)$

c. $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \cos x$ pada $c^0 = [\pi, -\pi]$

Penyelesaian:

a. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = (3-i)(2-i) + i(1+i)$

$$= 2 - i + 2i + 1 + i - 1 = -2 - 2i$$

Ternyata $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ tidak ortogonal.

b. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = (3-i)(1+i) + i(-2+4i)$

$$= (4+2i) - (4+2i) = 0$$

$$|\vec{v}_1|^2 = (3-i)(3+i) + i(-1) = 11$$

$$|\vec{v}_1|^2 = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}_2|^2 = (1+i)(1+i) + (2+4i)(2+4i) = 22$$

$$|\vec{v}_2|^2 = \sqrt{22}$$

Jadi himpunan vektor ortonormalnya

adalah $\left\{ \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{v}_1, \frac{1}{\sqrt{22}} \vec{v}_2 \right\}$

c. Kita periksa terlebih dahulu apakah f_1, f_2, f_3 ortogonal

$$\left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin x dx = 0$$

$$\left\langle \vec{f}_1, \vec{f}_3 \right\rangle == \int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos x dx = 0$$

$$\left\langle \vec{f}_2, \vec{f}_3 \right\rangle == \int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin x \cos x dx = 0$$

Jadi f_1, f_2 dan f_3 ortogonal, sedangkan

$$|f_1| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$|f_2| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \sqrt{\pi}$$

$$|f_3| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} c^2 x dx} = \sqrt{\pi}$$

Dengan demikian himpunan vektor ortogonal adalah $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_2, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_3 \right\}$.

5.9. Proses Ortogonalisasi Gram-Schmudit

Dalam bagian ini kita mencoba untuk mendapatkan basis yang ortogonal dari suatu ruang kali dalam dengan dimensi terbatas.

Definisi: Jika $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ himpunan vektor basis pada V dikatakan

i. Basis ortogonal jika $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0, i \neq j$

ii. Basis ortonormal jika $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = \delta_{ij}$

Untuk mendapatkan basis ini kita mulai untuk kasus sederhana untuk R^3. Jika $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ adalah vektor bebas linier pada R^3, maka proyeksi ortogonal $\vec{v}_2$ pada $\vec{v}_1$ adalah $\vec{P}(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$, misalkan $\vec{u}_1$ sebagai basis ortogonal dalam ruang tersebut.

Ambil $\vec{v}_1$ sebagai basis pertama $\vec{u}_1$ dan R^3 dimana $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$. Dari gambar dapat dilihat bahwa vektor $\vec{v}_2 - \vec{P}(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$ ortogonal pada $\vec{v}_1$ atau $\vec{u}_1$ dan sebagai basis kedua dari R^3 itu adalah:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{P}(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$$

panjang $\left|\vec{P}\right|$ dapat ditulis:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\bar{v}_2\right| \cos\theta$$

karena $\vec{P}$ searah $\vec{v}_1$ maka $\vec{P}$ dapat dinyatakan dalam vektor $\vec{v}_1$ yaitu:

$$\vec{P} = \left|\bar{v}_2\right| \cos\theta \frac{\vec{v}_1}{\left|\bar{v}_1\right|} \text{ atau } \vec{P} = \frac{\left|\bar{v}_1\right|\left|\bar{v}_2\right| \cos\theta}{\left|\bar{v}_1\right|^2} \vec{v}_1$$

karena $\left|\bar{v}_1\right|\left|\bar{v}_2\right| \cos\theta - \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle$ maka:

$$\vec{P} = \frac{\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle}{\left|\bar{v}_1\right|^2} \vec{v}_1$$

jadi: $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \dfrac{\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle}{\left|\bar{v}_1\right|^2} \vec{v}_1$

ganti $\vec{v}_1 = \vec{u}$ sehingga: $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \dfrac{\left\langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \right\rangle}{\left|\vec{u}_1\right|^2} \vec{u}_1$

untuk ruang R^n, langkah diatas dapat dikembangkan dengan langkah berikut:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle}{|\vec{u}_1|^2}\vec{u}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_3 \rangle}{|\vec{u}_2|^2}\vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_3 \rangle}{|\vec{u}_1|^2}\vec{u}_1$$

$$\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}_4 \rangle}{|\vec{u}_3|^2}\vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_4 \rangle}{|\vec{u}_2|^2}\vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_4 \rangle}{|\vec{u}_1|^2}\vec{u}_1$$

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_{k+1} \rangle}{|\vec{u}_1|^2}\vec{u}_1$$

untuk mendapatkan basis ortonormal, kita tinggal menormalisasikan basis $\vec{u}_1$.

Contoh: dapatkan basis ortogonal untuk ruang yang direntang $\vec{v}_1 = (1,0,1,0), \vec{v}_2 = (1,1,1,1)$ dan $\vec{v}_3 = (-1,2,0,1)$ pada R^3

Penyelesaian: $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ maka $|\vec{u}_1|^2 = 2$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle = (1,1,1,1)(1,0,1,0) = 2$$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_2 \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_2 \rangle}{|\vec{u}_1|^2} \vec{u}_1$$

$$= (1,1,1,1) - 2/2(1,0,1,0) = (0,1,0,1)$$

$$|\vec{u}_1|^2 = 2$$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{v}_3 \rangle = (-1,2,0,1)(1,0,1,0) = -1$$

$$\langle \vec{u}_2, \vec{v}_3 \rangle = (-1,2,0,1)(0,1,0,1) = 3$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_3 \rangle}{|\vec{u}_2|^2} \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{v}_3 \rangle}{|\vec{u}_1|^2} \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_3 = (-1,2,0,1) - 3/2(0,1,0,1) + 1/2(1,0,1,0) = 1/2(-1,1,1,-1)$$

Jadi basis ortogonal sub ruang yang direntang oleh $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dan $\vec{v}_3$ adalah $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), 1/2(-1,1,1,-1)\}$ dengan basis ortonormal $\{1/\sqrt{2}(1,0,1,0), 1/\sqrt{2}(1,0,1,0), 1/2(-1,1,1,-1)\}$.

5.10.Latihan

1. Tentukan himpunan berikut membentuk ruang vektor
    a. Semua vektor pada R^3 yang berbentuk (x,-x)

b. Semua fungsi pada interval $(-\infty,\infty)$ yang merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial $y^4 + y = x$

c. Himpunan matriks 2×2 non singular

d. Semua fungsi yang berbentuk $f(x) = ax + b$ dengan a dan b suatu konstanta

2. Tunjukkan $\vec{v}_1 = (-1,3,2), \vec{v}_2 = (1,-2,1)$ dan $\vec{v}_3 = (2,1,1)$ merentang pada R^3 dan nyatakan $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sebagai kombinasi linier dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

3. Tentukan vektor yang merentang pada ruang Penyelesaian Ax=0 dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan nilai k sehingga vektor berikut tidak bebas linier pada R^3: (1,1,k),(0,2,k),dan (1,k,6).

5. Tentukan vektor berikut bebas linier:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $f_1 = \cos x,\ f_2 = \sin^2 x,\ f_3 = \cos^2 x$ pada $c^\infty(-\infty,\infty)$

c. $f_1 = \ln x,\ f_2 = n\ln x, I = (0,\infty)$

d. $f_1(x) = \begin{cases} 5x3, x > 0 \\ -3x3, x < 0 \end{cases}$ $f_2(x) = 2x^2, I = (-\infty,\infty)$

6. Tentukan apakah vektor berikut ortogonal:
   a. {(1,2,-1,0,3),(1,1,0,2,-1),(4,2,-4,-5,-4)}
   b. $\{(1-i,i,2i),(2+3i,1-i)\}$
   c. $f_1(x) = \cos \pi x,\ f_2(x) = \cos 2\pi x,\ f_3 = \cos 3\pi x, I(-1,1)$
7. Carilah basis ortogonal dan sub ruang yang direntang oleh:
   a. {(1,1,-1,0),(-1,0,1,1),(2,-1,2,1)}
   b. $\{(1-i,i,2i),(1+2i,1-i,i)\}$
   c. $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2, I(0,1)$
   d. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

BAB VI

TRANSFORMASI LINIER

Deskripsi Singkat

Dalam bagian ini kita membicarakan pemetaan suatu ruang Vektor kerung Vektor lain yang kita sebut dengan pemetaan. Pemetaan yang kita tinjau merupakan hal yang banyak digunakan dalam Fisika, Teknik dan Ilmu Sosial.

Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan dapat mengerti tentang transformasi linier, sifat dan hasil transformasinya, serta dapat menggunakan matriks transformasi ortogonal dalam menghitung transformasi suatu titik.

6.1. Definisi Transformasi Linier

Misalkan V dan W merupakan suatu ruang vektor. Pemetaan $T: V \rightarrow W$ disebut transformasi linier atau operator linier dari V ke W dengan sifat-sifat:

1. $T(\vec{X} + \vec{Y}) = T(\vec{X}) + T(\vec{Y})$ untuk semua x,y di V.
2. $T(C\vec{X}) = CT(\vec{X})$ untuk semua $\vec{X}$ di V dan untuk semua skalar C.

Contoh: diberikan $T: R^2 \rightarrow R^2$ dengan bentuk $T(X_1, X_2) - (X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ buktikan ini merupakan suatu transformasi linier.

Penyelesaian: Misalkan $X = (X_1, X_2)$ dan $Y = (Y_1, Y_2)$ sembarang vektor di R^2

Maka $T(X + Y) = T\{(X_1, X_2) + (Y_1, Y_2)\}$

$= T(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$.

Merupakan bentuk transformasi yang diberikan dan didapat

$T(X, Y) = \{(X_1 + Y_1) - (X_2 + Y_2)(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\}$

$= \{(X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2), (X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2)\}$

$= (X_1 - X_2), (X_1 + X_2) + (Y_1 -$

$Y_2), (Y_1 + Y_2)$

$= T(X_1, X_2) + T[T(Y_1, Y_2)]$

Sedangkan untuk C suatu bilangan riil.

$T(CX) = T[C(X_1, X_2)] = T[(CX_1, CX_2)]$

$= (CX_1 - CX_2, CX_1 + CX_2)$

$= C(X_1 - X_2, X_1 + X_2) =$

$CT(X_1, X_2)$

$= CT(X)$

Contoh: diberikan $T: R^2 \rightarrow R^2$ dengan $T(X_1, X_2) = (X_1 + 1, X_2 - 2\ )$

Buktikan T tidak transformasi linier.

Penyelesaian: Misalkan $\vec{X} = (X_1, X_2)$ dan $Y = (Y_1, Y_2)$ vektor pada R^2

Maka $T(X + Y) = T(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$

$= (X_1 + Y_1 + 1, X_2 + Y_2 -$

$2)$

Sebaliknya $T(X) + T(Y) = (X_1 + 1, X_2 -$

$2)(Y_1 + 1, Y_2 - 2)$

$= X_1 + Y_1 +$

$2, X_2 + Y_2 - 4$

Jadi $T(X + Y) \neq T(X) + T(Y)$

Jika $T: V \rightarrow W$ suatu transformasi linier dimana V suatu ruang vektor dengan dimensi terbatas dan $\{\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_n}\}$ basis dari V. maka untuk suatu vektor V akan berlaku: $(\overline{V}) = \{C_1\overline{V_1} + C_2\,\overline{V_2} + \cdots + C_n\overline{V_n}\}$.

jika ditetapkan T pada $\overline{V}$ kita dapatkan:

$$T(\overline{V}) = T\{C_1\overline{V_1} + C_2\,\overline{V_2} + \cdots + C_n\overline{V_n}\}$$
$$= C_1T(\overline{V_1}) + C_2T(\overline{V_2}) + \cdots + C_nT(\overline{V_n})$$

Hal ini menunjukan jika kita mengetahui bagaimana transformasi basis untuk V, maka dapat ditentukan transformasi suatu vektor pada V.

Contoh: misal $T: R^2 \rightarrow R^2$ transformasi linier

$\overline{V_1} = (1, 0)$ dan $\overline{V_2} = (0, 1)$ basis pada R^2 dan $T(\overline{V_1}) = (3, -2)$ dan $T\overline{V_2} = (1, 5)$

Tentukan $T(X)$ untuk X di R^2

Penyelesaian: misalkan $X = (X_1, X_2)$ pada R^2 dengan menggunakan basis $\overline{V_1}$ dan $\overline{V_2}$ dapat ditulis:

$$X = X_1(1, 0) + X_2(0, 1)$$
$$= X_1\overline{V_1} + X_2\overline{V_2}$$
$$T(X) = T(X_1\overline{V_1} + X_2\overline{V_2})$$

$$= X_1T(\bar{V_1}) + X_2T(\bar{V_2})$$

$$= X_1(3, -2) + X_2(1, 5)$$

Jadi: $T(X) = 3X_1 + X_2 - 2X_1 + 5X_2$

6.4.1. Beberapa Sifat Transformasi Linier

Jika $T_1: V \rightarrow W_2 T_2: V \rightarrow W$ transformasi linier:

1. $T_1 = T_2$ jika hanya jika $T_1(\bar{V_1}) = T_2(\bar{V_2})$ untuk semua $\bar{V}$ di V
2. $(T_1 + T_2)\bar{V} = T_1(\bar{V}) + T_2(\bar{V})$
3. $(CT_1)(\bar{V}) = CT_1(\bar{V})$

Contoh: didefinisikan $T_1: R^2 \rightarrow R^2$ dan $T_2: R^2 \rightarrow R^2$ dengan $T_1(X) = AX$ dan $T_2(X) = BX$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Carilah: a. $(T_1 + T_2)$ b. CT_1

Penyelesaian:

a. Misalkan $\bar{X} = (X_1, X_2)$ vektor di R^2

Maka $(T_1 + T_2)X = T_1(X) + T_2(X)$

$$= AX + BX$$

$$= (A + B)X$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_1 \\ X_1 + 4X_2 \end{bmatrix}$$

Maka $(T_1 + T_2)(X_1, X_2) = (3X_1, X_1 + 4X_2)$

b. $(CT_1)\bar{X} = CT_1(\bar{X}) = CAX =$

$$C\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2CX_1 + CX_2 \\ -CX_1 + 3CX_2 \end{bmatrix}$$

Atau $(CT_1)(X_1, X_2) = (2CX_1 + CX_2, CX_1 + 3CX_2)$

6.2. Kernel dan Range

Untuk suatu transformasi linier $T: V \rightarrow W$, maka semua himpunan vektor $T(X) = 0$ dimana $x \epsilon V$ disebut Kernel atau Ruang Nol dan di tulis sebagai $Ker(T)$,

$Ker(T) = \{x \epsilon V: T(x) = 0\}$

Sedangkan kesemua vektor Y untuk $T(x) = Y$ disebut Range T dan dinyatakan dengan $Rag(T)$,

$Rag(T) = \{Y \epsilon V: T(x) = Y\}$

Contoh: dapatkan $Ker(T)$ dan $Rag(T)$ untuk transformasi linier $T: R^2 \rightarrow R^2$ yang didefinisikan dengan $T(x) = Ax$ dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 2X_2 \\ -X_1 & -2X_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga $Ker(T) + \{(X_1, X_2) \in R^2 : X_1 + 2X_2 = 0\}$

Misalkan $X_2 = S$ maka $X_1 = -2S$ sehingga

Penyelesaiannya $X_1 + 2X_2 = 0$ adalah $(-2S, S)$.

Jika $Ker(T) = \{(X_1, X_2) \in R^2 : X = S\,(-2,1), S \in R\,\}$

Untuk Range didapat $X_1 + 2X_2 = Y_1$

$$-2X_1 - 2X_2 = Y_2$$

Jika kedua persamaan dijumlahkan maka didapat

$Y_1 + Y_2 = 0$ untuk $X_1 = -S, X_2 = S$

Jadi $Y = S(-1, 1)$

$Rag(T) == \{(Y_1, Y_2) \in R^2 : Y = S\,(-1,1), S \in R\,\}$

Contoh: $R^3 \rightarrow R^3$ suatu transformasi linier dengan $T(x) - Ax$ dimana

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, dapatkan $Ker(T), Rag(T)$ dan interpretasi semestinya.

Penyelesaian: $Ker(T) = \{X \epsilon R^3 : AX = 0\}$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

Didapatkan persamaan: $X_1 + X_2 + X_3 = 0$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 0$$

$$3X_1 + 5X_2 + X_3 = 0$$

dengan operasi baris didapat matriks Augmented

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

atau $X_2 - X_3 = 0$ dan $X_1 - 2X_3 = 0$

Jika $X_3 = r$ maka $X_2 = r$ dan $X_1 = 2r$ sehingga $X = r(2, 1, 1)$

Jika $Ker(T) = \{X \in R^2: X = r(2, 1, 1)\}$ Vektor $(2, 1, 1)$ merupakan suatu garis pada R^3.

Untuk $Rag(T)$ adalah untuk transformasi $T(x) = Y$, dari sini didapat persamaan:

$$X_1 + X_2 + X_3 = Y_1$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = Y_2$$
$$3X_1 + 5X_2 + X_3 = Y_3$$

Dengan mereduksi Matriks Augmented dari $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ didapat $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 - 2Y_1 \\ Y_3 - 2Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$ yang berarti $Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 0$

Misalkan $Y_3 = S$ dan $Y_2 = t$ maka $Y_1 = 2t - S$

Dengan demikian $Y = (2t - S, t, S) = t(2, 1, 0) + S\,(-1, 0, 1)$

Jadi $Rag(T) = \{Y \in R^3: Y - t(2, 1, 0) + S(-1, 0, 1)\}$

Dari sini terlihat range dari T direntang oleh vektor (2, 1, 0) dan (-1, 0, 1) dan dimensi $Rag(T) = 2$. Secara Geometri range T merupakan bidang R^3.

6.3. Transformasi Orthogonal

Misalkan suatu pentransformasi dua vektor $\vec{x}$ dan $\vec{y}$ kita dapatkan:

$$\vec{v} = A\vec{x} \text{ dan } \vec{w} = A\vec{y}$$

dengan perkalian skalar didapat:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

atau $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_2} + \cdots + \overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{w_n} = \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{y_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n} \cdot \overrightarrow{y_n}$

untuk semua vektor $\vec{x}$ dan $\vec{y}$, ini berarti:

$$\vec{w}^T \cdot \vec{v} = (A\vec{y})^T \cdot A(\vec{x})$$

Disini kita gunakan transpos $\vec{w}^T$ dan $\vec{y}^T$ unutk menghasilkan vektor baris karena $\vec{w}$ dan $\vec{y}$ adalah vektor kolom.

Jika $\vec{w} = \vec{v}$ maka didapat $\vec{v}^T \cdot \vec{v} = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$ yang berarti adanya invariant panjang. Dengan meggunakan sifat perkalian matriks kita dapatkan:

$$\vec{w}^T \cdot \vec{v} = \vec{y}^T A^T A \vec{x}^T$$

jika $A^T A = I$ (matriks satuan/identifikasi) maka:

$$\vec{w}^T \cdot \vec{v} = \vec{y}^T \vec{x}$$

ini memberi $A^T = A^{-1}$ yang berarti A orthogonal. Dari $A^T A = I$ dapat ditulis:

$$a_{\cdot k} \cdot a_{\cdot j} = \delta_{kj}$$

Menunjukan bahwa vektor kolom A membentuk himpunan orthogonal. Dari sifat komut matriks invers juga kita dapatkan:

$$A^{-1} A = A A^{-1}$$

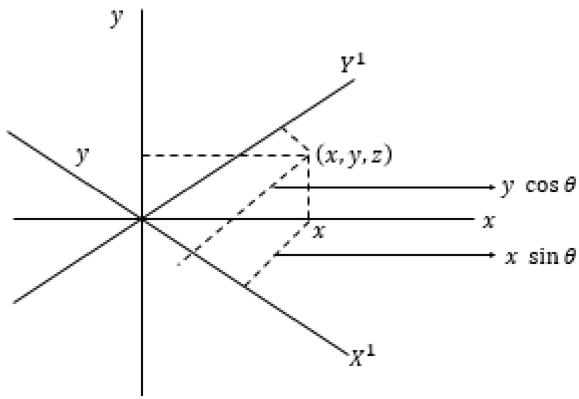
$$A^T A = I$$

$$a_{\cdot k} \cdot a_{\cdot j} = \delta_{kj}$$

Membutikan bahwa vektor baris A juga membentuk himpunan orthogonal.

Transformasi seperti yang diterangkan di atas merupakan transformasi orthogonal.

Contoh: misalkan rotasi sumbu z dalam ruang tiga dimensi dari (x, y, x) ke $(x^1,\ y^1,\ z^1)$.



Gambar 6.1. Rotasi pada sumbu z

Dari gambar didapat transformasi:

$$x^1 = x \ \cos\theta - y \ \sin\theta$$

$$y^1 = x \ \sin\theta + y \ \cos\theta$$

$$z^1 = z$$

atau $r^1 = Ar$. Dimana $r^1 = (x^1,\ y^1,\ z^1), r = (x, y, z)$

dan $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dalam kasus ini kita dapat menghasilkan invers dengan cara mengganti 0 dengan – θ dan didapat:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sedangkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Terlihat $A^{-1} = A^T$ yang berarti A orthogonal.

Selain itu juga didapat $\det(A) = 1$ dan perkalian $a._k \cdot a._j = \delta_{kj}$ didapat:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

dan $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

Begitu juga untuk $a._k \cdot a._j = \delta_{kj}$ didapat:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Baris $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ dari A adalah $x = 1, y = 0, z = 0$ yaitu sumbu x dalam sistem $(x^1,\ y^1,\ z^1)$. Seperti kolom $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$ dari A merupakan sumbu x pada system $(x^1,\ y^1,\ z^1)$.

Baris $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ dari A (kolom A^1) menggambarkan $x^1 = 1,\ y^1 = 0,\ z^1 = 0$. Begitu seterusnya dimana x^1 diberikan oleh kolom pada system (x, y, z). Untuk sistem dua dimensi yang dirotasikan kita dapat memperkecil A menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Contoh: Carilah matriks yang menggunakan refleksi melalui titik asal pada ruang tiga dimensi.

Penyelesaian: Transformasi refleksi melalui titik asal adalah:

$$x^1 = -x \quad y^1 = -y \quad z^1 = -z$$

Maka matriks yang dicari adalah:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dapat dibuktikan bahwa $A^{-1} = A = A^T$ dan $|A| = 1$.

Contoh: Carilah matriks refleksi pada bidang xz

Penyelesaian: Transformasi titik (x, y, z) ke $(x^1,\ y^1,$ $z^1)$ adalah:

$$x^1 = x \quad y^1 = y \quad z^1 = z$$

$$\text{Jadi } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh: dapatkan matriks transformasi yang dihasilkan dari rotasi sumbu melalui sudut θ_1 dari y ke x di sekitar sumbu z dan diikuti rotasi dengan θ_2 dari z^1 ke x^1 di sekitar sumbu y^1.

Penyelesaian: Rotasi pertama didapat A (seperti contoh sebelumnya):

$$r^1 = Ar \text{ dimana } A = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotasi kedua $r^{11} = Br^{1}$ dengan

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga $r^{11} = BAr$ dengan

$$BA = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \sin\theta_1 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_1 & -\sin\theta_2 \sin\theta_1 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Dapat dibuktikan bahwa BA orthogonal dan $|BA| = 1$

Contoh: Tunjukan rotasi melalui suatu sudut $\emptyset$ di sekitar suatu sumbu dalam arah vektor satuan $\vec{u} = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma)$ dapat ditulis sebagai diadik:

$\emptyset = \vec{u}\,\vec{u} + (\mathrm{I} - \vec{u}\,\vec{u})\ \cos\emptyset + \mathrm{I}\,x\,\vec{u}\ \sin\emptyset$

Dimana $\mathrm{I} = \mathrm{ii} + \mathrm{jj} + \mathrm{kk}$ dan

$I\ \times\ \vec{u} = (ii + jj + kk) \times (i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma)$

$= (-jk + kj)\cos\alpha + (ik -$
$kh)\cos\beta + (-ij + ji)\cos\gamma$

Diadik $\emptyset$ harus fungsi dari $\vec{u}$ dan $\emptyset$ dan memenuhi kondisi:

a. $\emptyset \cdot \vec{u} = u$
b. $\emptyset - I$ untuk $\emptyset = 0$
c. Jika ω vektor satuan dan ω tegak lurus $\vec{u}$ maka $(\emptyset\omega) \cdot \vec{u} = 0$ dan $(\emptyset\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = \cos\emptyset$ untuk $\emptyset = 90°, \emptyset\vec{\omega}$ tegak lurus pada $\vec{u}$ dan $\vec{\omega}$.

Perhitungan langsung menunjukan $\emptyset$ memenuhi kondisi a, b dan c. Dalam bentuk matriks $\emptyset$ dapat diungkapkan dengan:

$$\phi_{11} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha..\cos\varphi$$
$$\phi_{12} = (1-\cos\varphi)\cos\alpha..\cos\beta - \cos\gamma..\sin\varphi$$
$$\phi_{13} = (1-\cos\varphi)\cos\alpha..\cos\gamma + \cos\beta..\cos\varphi$$
$$\phi_{21} = (1-\cos\varphi)\cos\alpha..\cos\beta + \cos\gamma..\sin\varphi$$
$$\phi_{22} = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\varphi$$
$$\phi_{23} = (1-\cos\varphi)\cos\beta..\cos\gamma - \cos\alpha\sin\varphi$$
$$\phi_{31} = (1-\cos\varphi)\cos\alpha..\cos\gamma - \cos\beta..\cos\varphi$$
$$\phi_{32} = (1-\cos\varphi)\cos\beta..\cos\gamma - \cos\alpha\sin\varphi$$
$$\phi_{33} = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \cdot \cos\varphi$$

6.4. Matriks Transformasi Linier

Dari pembahasan terdahulu kita telah melihat sifat transformasi linier:

$$L(C_1V_1 + C_2V_2) = C_1L(V_1) + C_2L(V_2)$$

Dengan C_1 dan C_2 skalar dan $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ adalah vektor atau fungsi. Misalkan kita memiliki system kooerdinat dengan himpunan ortonormal $e_1,\ e_2, \dots ,\ e_n$ sebagai basis. Dengan menggunakan ini ruang vektor $\vec{V}$ dapat ditulis dengan:

$\vec{V} = \sum V_1 e_1$ $\qquad\qquad$ V_1 = Komponen Skalar.

Vektor LC_1 dapat diekspansi menjadi:

$Le_1 = \sum_l \gamma_{ij} e_j$........................$i = 1.2.,,,,,,,n$

Kuantitas γ_{ij} dapat diambil sehingga elemen matriks $[\gamma_{ij}]$ dan ini membentuk suatu matriks representasi dari operator L dalam suatu koordinat e_i. Elemen matriks ini dapat ditulis:

$$\gamma_{ij} = e^T(Le_j) \text{ atau } \gamma_{ij} = \int w\ e_i L e_j\ dx$$

Dimana w = suatu fungsi

Jika himpunan e_j tidak dinormalisasi, maka persamaan di atas dapat diganti dengan elemen diagonal.

$$\gamma_{ii} = \frac{e_i(Le_i)}{e_i e_i}$$

$$\gamma_{ii} = \frac{\int w\ e_i L e_j\ dx}{\int w\ e_i L e_j\ dx}$$

Ini berhubungan dengan elemen lain:

$$\gamma_{ii} = \frac{e_i L e_i}{(e_i e_i)(e_j e_j)}$$

Operator yang digunakan dalam mekanika kuantum adalah operator linier yang digambar dengan suatu matriks. Fungsi-fungsi basis dari Penyelesaian Persamaan Schrodinger biasanya merupakan fungsi-fungsi ortogonal. Maka elemen matriks untuk Operator Hamilton adalah:

$$H_{ij} = \int \Psi_i^* H \Psi_j\ dx$$

Contoh: Dapatkan matriks representasi dari operator $L = d/dx$ di ruang yang direntang oleh $\sin nx$, $\cos nx$ dalam interval $-\pi \leq x \leq \pi$.

Penyelesaian: Misalkan vektor-vektor ini adalah

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, 0, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Kita dapatkan elemen-elemen matriknya adalah:

$$a_{11} = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 0$$

Juga $a_{33} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \cos x \ \frac{d \cos x}{dx} = -\frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \cos x \sin x \ dx$

$$= 0$$

$$a_{34} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \cos x \ \frac{d \sin x}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \cos^2 x \, dx = 1$$

$$a_{33} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \cos x \ \frac{d \cos x}{dx} dx = 0$$

$$a_{43} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \sin x \frac{d \cos x}{dx} dx = 1$$

$$a_{44} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{x} \sin x \frac{d \sin x}{dx} dx = 0$$

Jika dilanjutkan didapat:

$$\frac{d}{dx} = L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Suatu sifat penting dari matriks oertogonal adalah tetap ortogonal setelah suatu transformasi ortogonal. Misalkan A suatu matriks ortogonal dengan t matriks transformasi ortogonal, maka:

$B = t^{-1}At$

$B^{-1} = (t^{-1}At)^{-1} = t^{-1}At^{-1}$

$B^T = (t^{-1}At)^T = t^T A^T (t^{-1})^T = t^{-1}A^T t$

Karena $t^T = t^{-1}$ dan $(t^{-1})^T = t$, akhirnya karena $A^{-1} = A^T$ maka $B^{-1} = B^T$.

6.5. Latihan

1. Tentukan apakah transformasi $T: R^{iiii} \to R^{ii}$ merupakan transformasi linier

   a. $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$

b. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, 1)$

c. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 - x_2)$

2. Jika $T: R^2 \to R^3$ suatu transformasi linier oleh $T(1,0) = (1, -1,2), T(0,1) = (2,1, -1)$. buktikan $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$
3. Tentukan ker(T) , Reg(T), dimensi Ker(T), dimensi Reg(T).
   a. $T: R^3 \to R^3$ dengan $T(x) = A(x)$ dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
   b. $T: R^3 \to R^2$ dengan $T(x) = A(x)$ dimana $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
4. Tentukam matriks refleksi melalui bidang yang mengandung sumbu Z dan membuat sudut 30° dengan bidang z, x.
5. Tentukan matriks refleksi melalui bidang yang mengandung sumbu Z dan membuat sudut α dengan bidang x, z.

BAB VII

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Deskripsi Singkat

masalah nilai eigen dan vektor eigen merupakan suatu masalah yang sangat penting dalam bidang fisika dan teknik. Jika suatu operator dikerja pada suatu fungsi akan didapat suatu nilai karakteristik dari fungsi itu.

Capaian Pembelajaran

Mahasiswa diharapkan dapat mengerti memahami apa yang dimaksud dengan nilai eigen, vektor eigen dan sifat vektor eigen untuk matriks-matriks tertentu.

7.1. Masalah Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Suatu A matriks $n \times n$ mengandung vektor tak nol x di R^n disebut dengan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x. Hal ini dapat dinyatakan dengan persamaan

$$Ax = \lambda x$$

Dimana λ suatu skalar yang disebut dengan nilai eigen dari A dan x disebut dengan vektor eigen. Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk lain:

$$(A - I\lambda)x = 0$$

Persamaan ini akan memiliki penyelesaian tak nol jika:

$$det(A - I\lambda)x = 0$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik.

Determinan dari $(A - I\lambda)x = 0$ ini merupakan suatu polynomial orde n dan dapat ditulis:

$$det(A - I\lambda) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

Dari persamaan karakteristik didapat koefisien c_1.

$$c_0 = (-1)^{n-1}$$

$$c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$

$$c_n = D(0) = \det(A)$$

Untuk kondisi $D(\lambda) = \det(A - 1\lambda) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n = 0$ didapat akar-akar persamaan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sehingga didapatkan:

$$c_1 = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n$$

$$c_n = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

Jika kita bandingkan koefisien-koefisien c_i pada persamaan di atas kita dapatkan beberapa sifat nilai eigen, diantaranya:

1. Jumlah dari masing-masing λ adalah trace dari matriks A
2. Perkalian masing-masing λ sama dengan det(A).

Contoh: Carilah nilai eigen untuk $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian: $\det(A - I) = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Dari sini didapat $\lambda = 1$ dan 2. Jadi nilai eigen dari A adalah 1 dan 2.

Jika nilai λ dimasukkan kembali kedalam persamaan $(A - I\lambda) = 0$, kita akan mendapatkan suatu sistem persamaan linier yang homogen. Penyelesaian dari sistem persamaan ini akan memberi suatu vektor eigen untuk suatu nilai λ.

Contoh: carilah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

7.2. Diagonalisasi

Misalkan A matrik n x n dengan elemen a_{ij} dan memiliki n vektor eigen x yang bebas linier. Vektor eigen x_i berhubungan dengan nilai λ_i sehingga $Ax_i = \lambda x_i$. Dalam bentuk matrik dapat kita tuliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{bmatrix}$$

atau $\sum a_{jk} x_{ki} - \lambda_i x_{ki}$

Sekarang kita bentuk matrik P dengan orde $n \times n$ yang elemen kolomnya adalah vektor x_i

$$P = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; \dots \;\; x_n]$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & \\ x_{n1} & x_{n2} & . & x_{nn} \end{bmatrix}$$

dalam bentuk elemen: $(P)_{ij} = x_{ij}$

Karena x_i bebas linier maka P adalah matrik non singular yang berarti P^{-1} ada. Perkalian antara A dengan P akan menghasilkan suatu matrik diagonal D dengan elemen diagonalnya nilai eigen dari A.

$$P^{-1}AP = D \text{ dengan } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ x_{21} & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & \\ 0 & 0 & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Bukti: persamaan $P^{-1}AP = D$ jika dikali dengan P dari kiri didapat AP=PD.

untuk elemen ke-ij ruas kirinya adalah:

$$(AP)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(P)_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_{ki}$$

$$= \lambda_i x_{ji}$$

untuk ruas kanan didapat:

$$(PD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (P)_{jk}(D)_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_{ki} \delta_{ki}$$

$$= \lambda_i x_{ji}$$

Jadi terbukti $P^{-1}AP = D$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Nilai eigen dari A didapat dari

persamaan $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(3-\lambda)^2 - 4 = 0$ dan didapat $\lambda = 1$ dan 5.

Untuk $\lambda = 1$ didapatkan persamaan: $2x_1 + 4_2 = 0$

$$x_1 + 2_2 = 0$$

Persamaan ini memberikan Penyelesaian $(s(-2{,}1)$. berarti untuk $\lambda = 1$ didapatkan vektor eigen (-2,1) dengan normalisasi $(-2\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Dalam notasi ket Dirac $|\,\rangle$ dan Bra Dirac $\langle\,|$ dapat ditulis:

$$\left|1\right\rangle = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{dan } \langle 1 \left| = \left[-2/\sqrt{5} \quad 1/\sqrt{5}\right]\right.$$

Untuk $\lambda = 5$ didapatkan vektor eigen (2,1) atau

$$\left|5\right\rangle = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{dan } \langle 1 \,| = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Dapat kita lihat:

$$\langle 1 \,\left| \langle 5 \,\right|^{T} = -\frac{2}{5}$$

Berarti ⟨1| dengan ⟨5| tidak ortogonal.

Untuk ⟨1| dan ⟨51| merupakan vektor ortogonal karena:

$$\langle 1|\langle 5| = \langle 1|5\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle 1|5\rangle = 0$$

Jika vektor Bra dan Ket di atas dibagi dengan $\frac{2}{\sqrt{5}}$ didapat:

$$\langle 1| = \left(\tfrac{1}{2}, -1\right) \; \langle 5| = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

Matrik diagonal didapat dengan perkalian matrik:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7.3. Vektor Eigen Matrik-matrik Komut

Pada bagian ini kita membahas bagian yang sangat penting dalam aljabar matrik, seperti dalam mekanika kuantum. Teorema untuk ini menyatakan:

Dari dua matrik yang komut dapat dicari himpunan vektor eigennya.

Andaikan A dan B matrik $n \times n$ yang komut serta dengan lainnya.

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

Pertama, misal λ nilai eigen dari A yang tidak berulang dengan vektor eigen x.

Jadi $Ax = \lambda x$

dengan mengalikan B didapat:

$$BAx = \lambda Bx$$

atau $A(Bx) = \lambda(Bx)$

Dari sini terlihat bahwa Bx merupakan juga eigen vektor dari A dengan nilai eigen yang sama. Karena x merupakan vektor eigen A yang tidak terdegenerasi, maka eigen Bx harus perkalian dari x. Jika ditinjau untuk B, kita dapatkan:

$$Bx = \mu x$$

Dengan nilai μ nilai eigen dari B untuk vektor eigen x. Dapat disimpulkan bahwa jika dua matrik yang komuts, setiap suatu dari vektor eigen yang tidak terdegenerasi merupakan eigen vektor dari yang lain. Bagaimana jika λ terdegenerasi ?

Andaikan λ nilai eigen dari A dengan kelipatan k. Ini akan menghasilkan k vektor eigen yang bebas linier, katakanlah $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang berhubungan dengan λ.

Jadi $Ax_i = \lambda x_i$

Seperti langkah sebelumnya dengan mengalikan persamaan dengan B didapatkan:

$$A(Bx_i) = \lambda(Bx_i)$$

Berarti Bx_i juga vektor eigen dari A untuk nilai eigen λ. Dapat dikatakan bahwa vektor eigen dari A untuk λ harus kombinasi linier dari vektor eigen terdegenerasi dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ sehingga:

$Bx_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_i$ dengan C_{ij} merupakan suatu skalar.

Contoh: dapatkan himpunan vektor eigen untuk dua matrik yang komut?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 11 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian: nilai eigen dari A didapat 3 (tunggal) dan -3 (ganda). Untuk $\lambda = 3$ didapat vektor eigen $x_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1\right)$

Karena x_1 vektor eigen tidak terdegenerasi dari A, maka dia juga merupakan vektor eigen dari B.

Dapat dibuktikan:

$$\begin{bmatrix} 10 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka 12 adalah nilai eigen dari B untuk vektor eigen x_1 yang sama dengan A.

untuk $\lambda = -2$ (ganda), didapat $x = (a, b, -\sqrt{2a} - \sqrt{3b})$

dan $$Bx = \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -\sqrt{2a} - \sqrt{3b} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 12 + 2\sqrt{6b} \\ 6b \\ -12\sqrt{2a} - 10\sqrt{3b} \end{bmatrix}$$

untuk x vektor eigen B didapat $Bx = \mu x$ sehingga didapat sistem persamaan:

$$12a + 2\sqrt{6b} = \mu x$$

$$6b = \mu x$$

$$-12\sqrt{2a} - 10\sqrt{3b} = \mu(-\sqrt{2a} - \sqrt{3b})$$

Persamaan kedua memberikan $\mu = 6$ atau b=0. Untuk b=0 pada persamaan pertama didapat $\mu = 12$ dengan a=1, maka vektor eigen pertama adalah:

$$x_2 = (1,0, -\sqrt{2})$$

untuk $\mu = 6$ dari persamaan pertama $b = -\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2}}$. Jika diambil $a = \sqrt{2}$ maka dihasilkan:

$$x_2 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1\right)$$

Vektor eigen $x_1, x_2, dan\, x_3$ adalah vektor eigen untuk A dan B.

7.4. Bilinier dan Bentuk Kuadrat

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan $y_1, y_2, \dots, y_n$ himpunan 2n variabel riil atau kompleks, maka:

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Dengan a_{ij} skalar, disebut dengan bentuk Bilinier. Untuk x,y vektor kolom A suatu matriks dimana:

$$x = \{x_i\}, y = \{y_i\}, A = \lfloor a_{ij} \rfloor$$

Bentuk Bilinier B dapat ditulis:

$$B = x^+ Ay$$

Jika $x = y$, maka dituliskan $Q = x^+ Ax$ dan disebut bentuk kuadratik dari x.

Contoh: Carilah $x^+ Ay$ dan $x^+ Ax$

$$x = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3 \\ 2i \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2-i \\ 0 \\ 2+i \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 6i & 2+3i & 0 \\ -i & 2i & 1-i \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$B = x^{+}Ay$

$$= \begin{bmatrix} 1-i & 3 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 6i & 2+3i & 0 \\ -i & 2i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 0 \\ 2+i \end{bmatrix}$$

$= 56 + 22i$

$Q = x^{+}Ax$

$$= \begin{bmatrix} 1-i & 3 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 6i & 2+3i & 0 \\ -i & 2i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 3 \\ 2i \end{bmatrix}$$

$= 38 + 59i$

Jika x dan A riil, maka bentuk kuadratik dapat ditulis:

$$x^{+}Ax = x^{T}Ax$$

atau $x^{T}Sx$ dimana S matrik simetri.

Bentuk kuadratik merupakan suatu bilangan sehhingga transposnya sama dengan dia sendiri.

Jadi $(x^{T}Sx)^{T} = x^{T}Ax$

$(x^{T}A^{T}x) = x^{T}Ax$

Jika dijumlahkan didapat:

$$x^{T}Ax = \frac{1}{2}(x^{T}Ax + x^{T}A^{T}x)$$

$$-\frac{1}{2}x^{T}(A + A^{T})x = \frac{1}{2}(A + A^{T})$$

Contoh: carilah $x^{T}Ax$ untuk $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$ dalam bentuk $x^T Sx$ dengan S matrik simetri.

Penyelesaian: bentuk $x^T Ax$ didapatkan hasilnya adalah**:**

$$x^T Ax = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2^3 + 3x_1x_2 - 4x_2x_3 + 14x_1x_3$$

sedangkan $S = \frac{1}{2}(A + A^T) =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3/2 & 7 \\ 3/2 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ sehingga didapat:

$$x^T Sx = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2^3 + 3x_1x_2 - 4x_2x_3 + 14x_1x_3$$

Jadi $x^T Ax = x^T Sx$

7.4.1. Bentuk Hermitz

Jika H matrik Hermitz bentuk kuadrat x^+Hx disebut dengan bentuk hermit.

Contoh: tunjukkan bahwa untuk x riil atau komplek bentuk kuadrat hermit selalu riil.

Penyelesaian: $Q = x^+Hx$

Karena Q skalar maka $Q^+ = \bar{Q}$ sehingga

$$Q^+ = (x^+Hx)^+$$

$$= x^+H^+x$$

$$= x^+Hx$$

$$= Q$$

Karena $Q = Q$ berarti nilai Q riil.

7.4.2. Transformasi Sumbu Utama

Misalkan x dan A adalah: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$ dengan a, b, dan h bilangan riil.

Bentuk $x^T Ax = c$ merupakan bentuk kuadrat dari persmaan

$$a{x_1}^2 + 2hx_1x_2 + b{x_2}^2 = c$$

Karena A matrik simetri maka dia dapat didiagonalisasi dengan matrik P sehingga

$$P^{-1}AP = D$$

dengan demikian bentuk kuadrat menjadi:

$$x^T PP^{-1}APP^{-1}x = c$$

$$(P^{-1}x)^T D(P^{-1}x) = c$$

jika dibentuk koordinat baru $y = P^{-1}x$, maka akan dihasilkan:

$$y^T Dy = c$$

atau $\lambda_1{y_1}^2 + \lambda_2{y_2}^2 = c$

$$\frac{{y_1}^2}{c/\lambda_1} + \frac{{y_2}^2}{c/\lambda_2} = 1$$

Persamaan terakhir dapat berupa lingkaran atau elips, tergantung pada nilai λ dan c.

Contoh: buktikan bahwa $8x^2 + 2\sqrt{2}xy + 7y^2 = 3$ menggambarkan sebuah elips, dapatkan juga panjang sumbu utama dan arahnya.

Penyelesaian: persamaan diatas dapat ditulis dengan $x^+Ax = 3$ dengan

$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dan A= $\begin{bmatrix} 8 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 7 \end{bmatrix}$

Dari A didapat nilai eigen dan vektor eigen yang dinormalisasikan sebagai berikut:

$$\lambda = 9x = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$$

$$\lambda = 6 \qquad x = (\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$$

dan $P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}, & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}}, \end{bmatrix}$

Misalkan $y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}x$, persamaan ini memberikan:

$9x'^2 + 6y'^2 = 3$ atau $3x'^2 + 2y'^2 = 1$

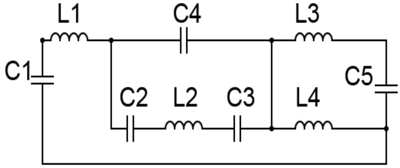
Yang merupakan suatu elips dengan panjang sumbu mayor $1/\sqrt{2}$ dan sumbu minor $1/\sqrt{3}$. Dari persamaan $y = P^{-1}x$ didapat:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{3}} + y\sqrt{2/3}$$

Jadi arah sumbu mayor membentuk sudut $tg^{-1}(-\sqrt{2})$ dengan sumbu x.

7.5. Penerapan Pada Kasus Fisika

Berikut satu kasus untuk memecahkan persamaan dinamika pada sistem konduktansi dan hambatan seperti gambar 7.1.



Gambar 7.1. Tinjauan rangkaian listrik dengan lima kapasitor dan empat induktor

Tinjauan pada setiap titik induktor, diperoleh

$$L_1\ddot{q}_1 + C_{124} - C_2q_2 - C_4q_3 + C_{345}q_4 = 0$$

$$L_2\ddot{q}_2 - C_2q_1 + C_{23}q_2 - C_3q_3 + C_{35}q_4 = 0$$

$$L_3\ddot{q}_3 - C_4q_1 + C_3q_2 - C_{34}q_3 + C_5q_4 = 0$$

$$L_4\ddot{q}_4 + C_5q_4 = 0$$

Fungsi ansatz yang digunakan adalah

$$q_i(t) = a_ie^{j\omega t}$$

Dengan i=1, 2, 3; dan j = bilangan kompleks bernilai $\sqrt{-1}$, ω adalah simpangan pegas. Jika fungsi ini didiferensialkan dua kali terhadap waktu maka diperoleh

$$\ddot{q}_\iota(t) = -\omega a_ie^{j\omega t}$$

Masukkan hasil diferensial tersebut ke masing-masing tinjauan setiap titik induktor

$$-\omega^2L_1a_1 + C_{124}a_1 - C_2a_2 - C_4a_3 + C_{345}a_4 = 0$$

$$-\omega^2L_2a_2 - C_2a_1 + C_{23}a_2 - C_3a_3 + C_{35}a_4 = 0$$

$$-\omega^2L_3a_3 - C_4a_1 - C_3a_2 - C_{34}a_3 - C_5a_4 = 0$$

$$-\omega^2L_4a_3 + C_5a_4 = 0$$

Pada kasus sistem kapasitor dan resistor di atas, akan ditentukan masing-masing nilai kapasitor dan resistor yang digunakan yaitu

$$C_1 = 36F;\ C_2 = 80F; C_3 = 80F;\ C_4 = 103F;\ C_5 = 62F$$

$$L_1 = 10H;\ L_2 = 20H; L_3 = 30H;\ L_4 = 40H$$

Masing-masing nilai diatas disubstitusi ke persamaan tinjauan setiap titik induktor

$$-\omega^2 L_1 a_1 + C_{124} a_1 - C_2 a_2 - C_4 a_3 + C_{345} a_4 = 0$$

$$-\omega^2 L_2 a_2 - C_2 a_1 + C_{23} a_2 - C_3 a_3 + C_{35} a_4 = 0$$

$$-\omega^2 30 a_3 - 103 a_1 - -80 a_2 - 45 a_3 - 62 a_4 = 0$$

$$-\omega^2 40 a_3 + 62 a_4 = 0$$

Dari empat tinjauan tersebut maka daapt dinyatakan dalam bentuk

$$-\omega^2 Aa + Ba = 0$$

Dengan

$$Aa = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$Ba = \begin{bmatrix} 20 & -80 & -103 & 26 \\ -20 & 40 & -80 & 35 \\ -103 & -80 & -45 & -62 \\ 0 & 0 & 0 & 62 \end{bmatrix}$$

Hasil matrik Aa dan Ba tersebut akan diinput dalam Matlab dengan tujuan untuk menentukan nilai dan vektor Eigen berdasarkan kasus fisika berupa gerak osilator dengan lima kapasitor dan empat induktor, sehingga diperoleh hasil eksekusi nilainya.

Berikut hasil running program dapat ditampilkan pada jendela *command window* setelah ditekan F5 sebagai berikut:

##INPUT ELEMEN MATRIKS A##
A1, 1
= 10
.
.
A4, 4
= 40

Matriks A

10	0	0	0
0	20	0	0
0	0	30	0
0	0	0	40

Siapkan ruang untuk matriks B
Masukkan jumlah baris=4
Masukkan jumlah kolom=4

##INPUT ELEMEN MATRIKS B ##
B1, 1
=20
.
.
B4, 4
= 62

Matriks B

20	-80	-103	26
-20	40	-80	35
103	-80	-45	-62
0	0	0	62

=================== Nilai Eigen ==============================
lambda = 4.3131 0.1242 0.5067 2.3490

================== Vektor Eigen ==============================
omega = 0.2890 2.3236 1.2346 0.51221

7.6. Latihan

1. carilah nilai eigen dari: a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
2. buktikan nilai eigen dari matrik hermit adalah bilangan ril dan vektor eigennya bersifat orthogonal.
3. jika A matriks simetri dan $Ax = \lambda x$ dan $Ax = \lambda y$. Buktikan $x^T Ay = 0$ dan x dengan y ortogonal
4. buktikan nilai eigen dari matrikdiagonal adalah elemen diagonal itu sendiri.
5. Jika x vektor eigen dari matrik H Hermit dan y ortogonal terhadap y, buktikan Hy juga orthogonal dengan x.
6. dapatkan Penyelesaian persamaan $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x$ dimana $x(0) = (1.1)$ pada $t = 0$.

Kepustakaan

Arfken, G. 1985. ***Mathematical Method For Physics***. Academic Press, Inc. New York.

Anton, Howard. 1987. ***Elementary Linier Algebra***. John Wiley & Son. New York.

Anton, Howard and Rorres, Chris. 2004. ***Aljabar Linear Elementer***, versi Aplikasi, Edisi Kedelapan, Jilid 1. Penerbit Erlangga, Jakarta

Boas, Mary. 1983. ***Mathematical In The Physical Sciences***. John Wiley & Son. New York.

Bronwel, A. 1953***. Advanced Mathematical In Physics And Engineering***. Mc Graw-Hill. New York

Davis, H. Ted & Thomson, Kendall T. 2000. ***Linear Algebra and Linear Operators in Engineering with Applications in Mathematica*.** Academic Press, London

Goode, Stephen W. 1991. ***An Introduction To Diffrential Equation And Linier Algebra***. Prentice Hall London

Hefferon, Jim. 2008. ***Linear Algebra*.** Mathematics, Saint Michael's College Colchester,Vermont USA

Hollingsworth, C.A. 1967. Vektor: ***Matrics And Teory Group For Scientis And Engineers***. Mc Graw-Hill. New York

Joshi, A. 1975. ***Matrices And Tensor In Physics.*** Academic Press, Inc. New York

Muntoharoh, L., Pamungkas,M.P., and Sari, R.P. 2021. Penerapan Program Software Matlab dalam Memecahkan Permasalahan Rangkaian Listrik. ***Jurnal Fisika Unand.*** Volume 10 Nomor 3

Oppliger, Rolf. 2005. ***Contemporary Cryptography*.** Boston: Artech House.

GLOSARIUM

Matriks Adjoin : Dalam matriks 2*2, matriks adjoinnya adalah pertukaran elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama, dan mengalikan elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping dengan -1. Sedangkan dalam matriks 3*3, matriks adjoinnya merupakan transpose dari kofaktor matriks A (KA) t

Aturan Cramer : rumus untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier dari n variable dengan menggunakan determinan.

Basis : himpunan S disebut basis dari suatu V jika memenuhi : S merupakan bebas linear dan S merentang V.

Bebas Linear : dari suatu persamaan vektor yang paling tidak memiliki satu langkah penyelesaian, maka s dikatakan himpunan yang bebas linier. Tetapi apabila tidak ada penyelesaian, maka s merupakan suatu himpunan yang tak bebas secara linier.

Diagonalisasi : Sebuah matriks A dapat didiagonalisasikan apabila terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga berlaku P -1*AP* merupakan matriks diagonal, dimana matriks P dapat dikatakan mendiagonalisasi matriks A.

Dimensi : dimensi dari ruang vector V adalah banyaknya vektor dalam sembarang basis dari V. (jika V={0}, maka dimensinya adalah 0).

Determinan : suatu nilai matriks yang berbentuk persegi. Determinan matriks hanya dimiliki oleh sebuah matriks yang jumlah kolom dan jumlah barisnya sama.

Ekspansi baris : Dalam determinan suatu matrks, maka kofaktor yang dihitung hanya tergantung pada baris matriks dan kolom matriks saja. Untuk baris disebut sebagai ekspansi baris dan untuk kolom disebut sebagai ekspansi kolom.

Eliminasi : menghilangkan salah satu persamaan dan meletakkan kedua persamaan dalam posisi urutan yang sama dan membuat salah satu variabel untuk memiliki koefisian yang sama dengan variabel kedua yang ingin di eliminasi. image processing: proses mengolah piksel-piksel di dalam citra digital untuk tujuan tertentu.

Jangkuan : dari F Ruang Peta (Image) ialah Himpunan semua vektor di dalam w yang termasuk bayangan di bawah F dari paling sedikit satu vektor di dalam V

Kernel : atau biasa disebut juga ruang nol dari F ialah himpunan vektor di dalam V yang dipetakan Fke dalam 0, Sedangkan penulisannya dinyatakan oleh ker (F).

Koefisien : Bilangan yang memuat suatu variabel pada bentuk aljabar.

Kofaktor : Nilai suatu kofaktor matriks diperoleh ketika nilai dari minor diperoleh. Kombinasi linier : suatu kondisi dimana vektor – vektor yang diberikan pada soal harus memenuhi syarat a = K1u + K1v.

Konstanta : Bilangan tetap

MATLAB : singkatan dari Matrix Laboratory dan merupakan bahasa pemograman tinggi, tertutup dan case sensitive didalam lingkungan komputasi numerik yang dikembangkan oleh Mathworks

Matriks : kumpulan dari beberapa nilai yang memiliki baris dan kolom. Matriks baris : sebuah matriks yang hanya memiliki satu baris saja atau tidak lebih dari satu baris.

Matriks diagonal : sebuah matriks persegi yang jumlah baris dan kolomnya sama dan semua elemnnya bernilai nol, kecuali elemen – elemen diagonal utamanya.

Matriks echelon : setiap baris yang dimana semua unsurnya bernilai nol (apabila ada) maka terletak sebuah baris yang mempunyai suatu unsur yang bernilai bukan nol.

Matriks ekivalen : Dua buah matriks A dan matriks B dapat dikatakan ekivalensi apabila salah satunya diperoleh dari matrik yang lain dengan suatu operasi transformasi atau peprindahan suatu nilai elementer terhadap baris dan kolom suatu matriks.

Matriks elementer : suatu matriks bujursangkar yang dapat diperoleh dari sebuah matriks satuan yang sesuai dan menggunakan operasi baris elementer.

Matriks elementer merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh hasil invers dari suatu matriks.

Matriks identitas : sebuah matriks persegi yang semua elemen diagonal utamanya bernilai satu dan elemen lainnya bernilai nol.

Matriks Invers : Jika A dan B adalah sebuah matriks berbentuk bujur sangkar dan berlaku notasi AB = BA = I (I adalah matriks identitas), maka dapat dikatakan bahwa A dapat dibalik dengan B, sehingga B adalah matriks invers dari A (notasi: A–1).

Matriks kolom : matriks yang hanya memiliki satu kolom saja atau tidak lebih dari satu kolom.

Matriks nol : matriks yang setiap elemennya selalu bernilai nol.

Matriks persegi : biasa juga disebut matriks bujur sangkar merupakan sebuah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolomnya sama.

Matriks segitiga atas : sebuah matriks yang semua elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol dan berbentuk segitiga berada di atas.

Matriks segitiga bawah : sebuah matriks yang semua elemen di atas diagonal utamanya selalu bernilai nol dan berbentuk segitiga berada di bawah.

Matriks skalar : sebuah matriks persegi yang memiliki jumlah baris dan kolom sama dan nilai semua elemen pada diagonal utamanya sama, tetapi bukan nol dan semua elemen lainnya bernilai nol.

Minor : Apabila A merupakan matriks kuadrat , maka minor aij dinyatakan oleh Mij yang dimana merupakan submatriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke- I dengan kolom ke- j.

Nilai Eigen dan Nilai Vektor : Apabila A merupakan suatu matriks yang memiliki ordo n x n, sehingga dikatakan vektor tak nol yang berada pada R n disebut sebagai sebuah vektor eigen dari matriks A apabila Ax merupakan suatu kelipatan dari skalar x, maka: A x = λ x Dimana skalar λ merupakan suatu sebagai nilai eigen sedangkan A dan x disebut sebagai sebuah vektor eigen yang saling berhubungan dengan λ.

Ordo : perkalian antara baris dan kolom.

Rank matriks : jumlah maksimum vektor – vektor pada baris dan kolom yang bebas linier.

Substitusi : mengganti salah satu persamaan menjadi persamaan yang lain atau membuat salah satu persamaan menjadi persamaan x = …. Atau persamaan y = …. Dan memasukkan hasil persamaan yang sudah diganti ke persamaan yang lainnya. Transformasi linier : Jika f : V → W merupakan fungsi suatu ruang dan vektor V ke dalam ruang vektor W, maka f disebut transformasi linier (pemetaan linier).

Transpose matriks A : perpindahan antara baris menjadi kolom atau kolom menjadi baris. Transpose matriks A dinyatakan dengan symbol A T .

Vektor : Sebuah vektor dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu matriks baris maupun matriks kolom dari suatu komponen vektor.

Variabel : Lambang atau simbol yang mewakili jumlah sesuatu (bilangan).

INDEKS

BIOGRAFI PENULIS

Siska Desy Fatmaryanti dilahirkan di Surakarta pada tanggal 23 Desember 1981. Gelar sarjana (S1) Ilmu Fisika diperoleh dari Fisika FMIPA Universitas Sebelas Maret pada tahun 1998. Pada tahun 2006 gelar Magister Sains (S2) ilmu Fisika diperoleh dari Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada. Tahun 2018 menyelesaikan studi S3 pada Program Doktor (S3) Pendidikan IPA Universitas Sebelas Maret dengan judul disertasi Pengembangan Model Pembelajaran GIMuR untuk meningkatakan kemampuan generik sains Fisika SMA. Tiga karya buku yang telah dihasilkan adalah Implementasi model GiMUR (2018), Fisika Dasar Kemagnetan (Hibah Buku Ajar DIKTI 2019) dan Pembelajaran Sains di era Pandemi (2020). Sejak tahun 2007 hingga sekarang bekerja sebagai Dosen di program studi Pendidikan Fisika Universitas Muhammadiyah Purworejo mengampu matakuliah Fisika dasar 2, Matrik dan Ruang Vektor, Listrik Magnet dan Fisika Matematika. Pernah menjabat sebagai ketua program studi pendidikan fisika, Kepala Unit pengembangan Pendidikan dan kepala Lembaga Penjaminan Mutu. Saat ini penulis menjabat sebagai Wakil Rektor 1 Universitas Muhammadiyah Purworejo .

Matriks dan Ruang Vektor dalam Fisika dengan Aplikasi Program Matlab" dengan segenap kemampuan. Buku ini terdiri atas tujuh bab yang mengupas teori dasar matriks, Sistem Persamaan Linier, determinan, ruang vektor sampai pada transformasi linier dan perhitungan nilai eigen maupun vektor eigen. Buku ini sebagai pegangan dan membantu untuk memahami perkuliahan Matriks dan Ruang Vektor bagi mahasiswa khususnya, yang dilengkapi dengan pengerjaan menggunakan program MATLAB dan diperkaya dengan penerapan pada konsep fisika.

ISBN 978-623-7261-61-2 (PDF)